

Analysis II
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am 22.04.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. (10 Punkte) Für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^3 ist.
2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|x\| \leq \|x\| \leq 3\|x\|.$$

Dabei sei $\|\cdot\|$ die aus der Vorlesung bekannte Norm.

Bemerkung: Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ zwei Normen auf einem Vektorraum V . Wenn es $c_1, c_2 > 0$ gibt, so dass

$$c_1\|v\| \leq \|v\| \leq c_2\|v\|$$

gilt für alle $v \in V$, dann heißen die beiden Normen *äquivalent*.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Welche Spur gehört zu welcher Kurve?

$$f: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

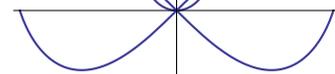
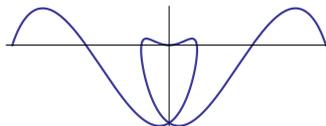
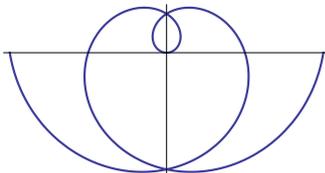
$$f(t) = (t \cos(t), t \sin(t))$$

$$g: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g(t) = (t \cos(t), t \sin(t) \cos(t))$$

$$h: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h(t) = (t \cos(t), t \sin(t) \cos(2t))$$



Aufgabe 3. (5 Punkte) Gegeben ist die Kurve $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$. Berechnen Sie die Bogenlänge.

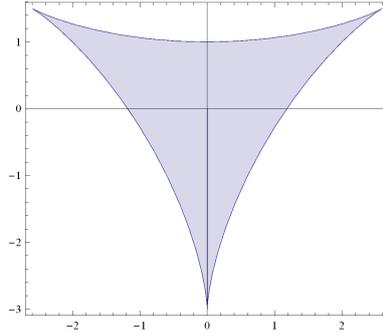
Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 4. Gegeben ist die Kurve $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$.

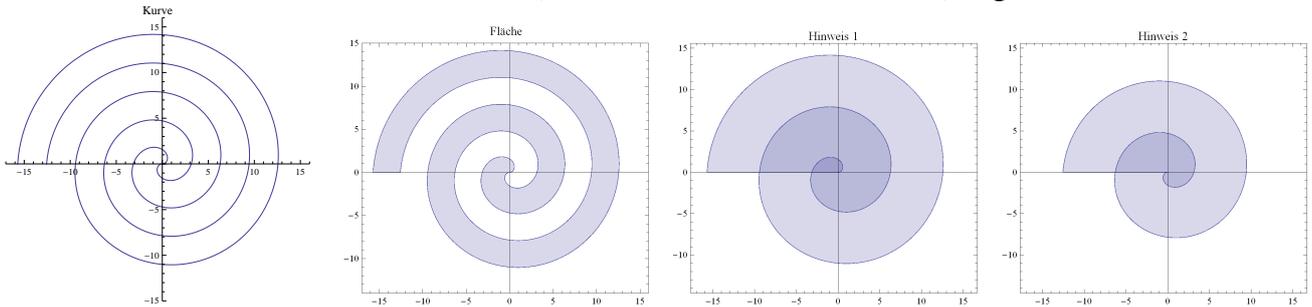
1. Skizzieren Sie die Spur.
2. Die Kurve hat einen Doppelpunkt. Berechnen Sie den Winkel von den Tangentialrichtungen in diesem Doppelpunkt.

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Gegeben ist die Kurve $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\sin(2t) + 2\cos(t), \cos(2t) + 2\sin(t))$. Berechnen Sie den Flächeninhalt vom Gebiet, so wie er in der beiliegenden Skizze dargestellt wird.



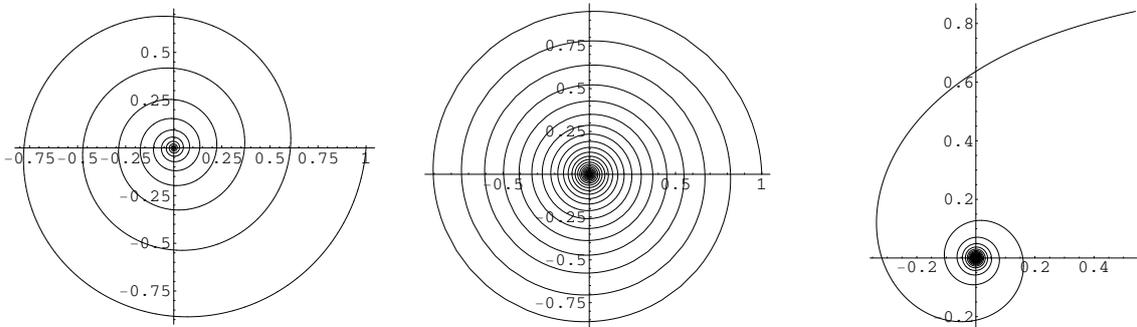
Aufgabe 6. Gegeben ist die Kurve $f : [-4\pi, 5\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t \cos(t), t \sin(|t|))$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Wurms“, der unten (in der zweiten Skizze von links) abgebildet ist.



Aufgabe 7. Drei Spiralen sind gegeben. In Spaltenschreibweise:

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \cos(4\pi \log(t)) \\ t \sin(4\pi \log(t)) \end{pmatrix} \quad g(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(5\pi t) \\ e^{-t} \sin(5\pi t) \end{pmatrix} \quad h(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(e^t) \\ e^{-t} \sin(e^t) \end{pmatrix}$$



Welche hat unendliche und welche hat endliche Bogenlänge?