Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am 01.07.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Gegeben sei das Polynom $p:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = 1 + x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_3.$$

Hat dieses Polynom ein Minimum?

Aufgabe 2. Wir betrachten $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = 1 + (x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2 - 8x^4 - 4y^2.$$

- Berechnen Sie die stationären Punkte von f.
- Welche liefern ein Extremum?
- Welches Extremum ist global und welches lokal?

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Beantworten Sie die Fragen aus Aufgabe 2 für $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) = e^{x^2+y^2}\left(1 - x^2 - y^4\right).$$

Aufgabe 4. Für welche $a,b \in \mathbb{R}$ hat $f(x,y) = x^2 + axy + by^2$ ein Minimum in $(0,0)$?

Aufgabe 5. Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion. Geben Sie das formale Taylorpolynom dritter Ordnung an der Stelle $a = (0,0)$ an.

Aufgabe 6. Geben Sie die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \ln\left(1 - x + y^2\right)$ in $(1,2)$ an.

Aufgabe 7. Berechnen Sie eine Tangentialebene an den Graphen der Funktion $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x,y) = x^2 + 2xy + y^4$, die die Gerade $\{(t, 1-t, 0)\,; t \in \mathbb{R}\}$ enthält.

(bitte wenden)

Aufgabe 8. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine fünfmal differenzierbare Funktion mit $\partial^\alpha f(0,0) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| \leq 2$.

1. Zeigen Sie: Wenn es ein $\alpha \in \mathbb{N}^2$ gibt mit $|\alpha| = 3$ und $\partial^\alpha f(0,0) \neq 0$, dann hat f kein Extremum in $(0,0)$.

2. Zeigen Sie: Wenn außerdem $\partial^\alpha f(0,0) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^2$ mit $|\alpha| = 3$ und
$$\xi_1^4 \partial_1^4 f(0,0) + 4\xi_1^3 \xi_2 \partial_1^3 \partial_2 f(0,0) + 6\xi_1^2 \xi_2^2 \partial_1^2 \partial_2^2 f(0,0) + 4\xi_1 \xi_2^3 \partial_1 \partial_2^3 f(0,0) + \xi_2^4 \partial_2^4 f(0,0) > 0$$
für $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dann hat die Funktion f ein Minimum in $(0,0)$.

3. Hat $f(x,y) = x\left(e^{xy^2} - 1 - y^2\right)$ ein Extremum in $(0,0)$? Und $f(x,y) = x\left(e^{xy^2} - 1 - xy^2\right)$?