

Analysis II
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden am 08.07.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Es sei $y \in \{0, \dots, 9\}$ die letzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer. Verwenden Sie das Newtonverfahren, um die Lösung von

$$x + e^x - \frac{1}{2} - y = 0$$

zu approximieren. Starten Sie bei $x_0 = 1$ und benutzen Sie einen (Taschen-) Rechner, um die Lösung auf mindestens 8 Dezimalstellen genau zu berechnen. Geben Sie auch die Zwischenergebnisse an.

Aufgabe 2. Wir betrachten $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2 - 2z$.

1. Zeigen Sie, dass für $z, w \in B_{1/4}(1)$ gilt: $|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2}|z - w|$.
2. Ist f eine Kontraktion auf $B_{1/4}(1)$?
3. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

Klausur:

Wenn Sie an der Klausur vom 24. Juli 2010 teilnehmen wollen, melden Sie sich bitte bis zum 15. Juli 2010 schriftlich an. Informationen und Anmeldeformulare gibt es auf der Webseite.



Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ eine Umgebung $B_r(a, b)$ gibt, für die $f|_{B_r(a, b)}$ umkehrbar ist.
2. Wieso ist $f|_{B_r(0, 0)}$ für kein $r > 0$ umkehrbar?
3. Hat $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}}$ eine Inverse?

Aufgabe 4. Das Newton-Verfahren für $\arctan x = 0$, das heißt

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i),$$

konvergiert nur, wenn x_0 nahe bei 0 gewählt wird.

1. Zeigen Sie, dass es ein $a \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass für $x_0 = a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ periodisch ist.
2. Zeigen Sie, dass für $x_0 > a$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ divergiert.
3. Zeigen Sie, dass für $x_0 \in (0, a)$ die Folge $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ konvergiert.
4. Geben Sie ein Verfahren an, das a approximiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 5.

1. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$ eine Kontraktion auf \mathbb{R} ?
2. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \sin(x)$ eine Kontraktion auf \mathbb{R} ?

Aufgabe 6. Geben Sie ein Newtonverfahren an, um $\sqrt[7]{2}$ durch rationale Zahlen zu approximieren.

Aufgabe 7.

1. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ gegeben. Bei welchen Punkten hat f lokal **keine** Umkehrfunktion?
2. Berechnen Sie die Umkehrfunktion zu $f : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^3$ mit $f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$.