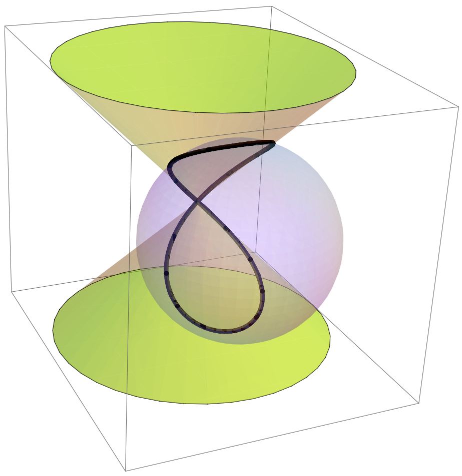
Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am 15.07.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.



Man betrachte die Schnittmenge S der Kugel $\{(x,y,z)\,;x^2+y^2+z^2=1\}$ mit dem Doppelkegel $\left\{(x,y,z)\,;z^2=(x-1)^2+y^2\right\}$.

1. Sei $P=(0,0,1)$. Zeigen Sie $P\in S$ und zeigen Sie, dass es differenzierbare Funktionen $f,g:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}$ gibt, so dass
$$y\mapsto\begin{pmatrix}f(y)\\ y\\ g(y)\end{pmatrix}$$
die Schnittmenge in der Nähe von P beschreibt.

2. Sei $Q=(1,0,0)$. Zeigen Sie $Q\in S$. Kann man den Satz über implizite Funktionen anwenden, um die Existenz einer differenzierbaren Funktion zu zeigen, die S in einer Umgebung von Q beschreibt?

Aufgabe 2. Gegeben sei die Menge
$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+xy+y^2+yz+z^2=1\right\}.$$
Welcher Punkt auf T hat den größten x-Wert?

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Tangenten in $\left(\sqrt{7},0\right)$ und in $\left(2\sqrt{2},-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ an
$$\left\{(x,y)\,;x^2+xy+2y^2=7\right\}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Wir betrachten $G = \left\{(x,y)\,; x^2 - x^2y^4 - x^6 - y^2 = 0\right\}$. Es gibt drei Stellen (a,b), bei denen man G lokal nicht als Graphen einer Funktion $y = g(x)$ schreiben kann. Geben Sie diese an.

Aufgabe 5. Der Durchschnitt von

$$\left\{(x,y,z)\,; (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 6\right\} \text{ und } \left\{(x,y,z)\,; (x-1)^2 + z^2 = 1\right\}$$

ergibt die Spur einer Kurve. Berechnen Sie die Tangente daran in $(1,1,1)$.

Aufgabe 6.

1. Wenn man eine Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ betrachtet unter den Nebenbedingungen

   $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,$$

   wie viele freie Variablen bleiben übrig? Das heißt, wie viele Variablen braucht man maximal, um f lokal zu studieren?

2. Und wenn man $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ betrachtet unter den Nebenbedingungen

   $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \text{ und } x_1 + x_4 = 0?$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Punkte, die sowohl auf der Kugel K als auch auf dem Zylinder Z liegen und maximale Entfernung von $(0,0,0)$ haben.

$$\begin{aligned} K &= \left\{(x,y,z)\,; (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 4\right\}, \\ Z &= \left\{(x,y,z)\,; (x-1)^2 + z^2 = 1\right\}. \end{aligned}$$