

Analysis II  
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden am 22.07.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

**Hinweis:** Diese Hausaufgaben müssen nicht eingereicht werden. Punkte, die Sie für die ersten beiden Aufgaben bekommen, werden jedoch für die Zulassung zur Nachklausur angerechnet.

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 \cos(x^2) dx dy.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie das Volumen des Kegels  $K = \{(x, y, z); 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ .

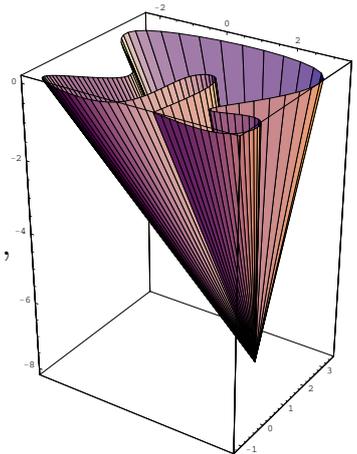


Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die Tüte

$$T = \left\{ \theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \theta) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega, 0 \leq \theta \leq 1 \right\},$$

wobei  $\text{Vol}_{\mathbb{R}^2}(\Omega) = 7$ . Berechnen Sie  $\text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(T)$ .



**Aufgabe 4.** Berechnen Sie für  $B = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\}$  das Integral  $\int_B x_3^2 dx$ .

**Aufgabe 5.** Welches Volumen hat der Durchschnitt der Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ und } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + z^2 \leq 1\}?$$

(bitte wenden)

### Aufgabe 6.

1. Erklären Sie, wieso für  $Q_R = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| \leq R \text{ und } |x_2| \leq R\}$  gilt, dass

$$\left( \int_{-R}^R e^{-t^2} dt \right)^2 = \int_{Q_R} e^{-\|x\|^2} dx.$$

2. Berechnen Sie für  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq R\}$  das Integral

$$\int_{B_R} e^{-\|x\|^2} dx.$$

Hinweis: Polarkoordinaten.

3. Zeigen Sie, dass

$$\int_{B_R} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{Q_R} e^{-\|x\|^2} dx \leq \int_{B_{\sqrt{2}R}} e^{-\|x\|^2} dx.$$

4. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$