Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

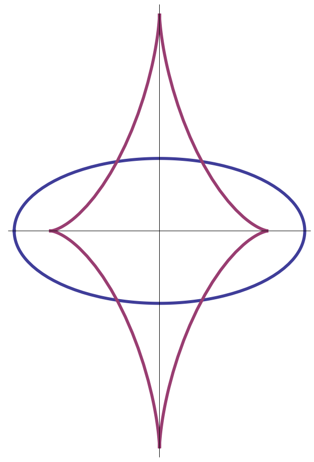
Analysis II
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am 29.04.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Gegeben seien die vier Kurven:

$$\begin{aligned} f &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \\ g &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } g(t) = \left(t^2 \sin(t), t^2 \cos(t), 4t\right), \\ h &: [0,1] \to \mathbb{R}^4 \text{ mit } h(t) = \left(t, t^2, t^3, t^4\right), \\ k &: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \text{ mit } k(t) = \left((\cos(t))^3, \cos(2t)\right). \end{aligned}$$

1. Welche dieser Kurven ist glatt?
2. Für welche dieser Kurven existiert eine differenzierbare Umparametrisierung auf Bogenlänge?



zu Aufgabe 3

Aufgabe 2. Gegeben ist die Kurve $f : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$. Parametrisieren Sie diese Kurve um auf Bogenlänge und berechnen Sie:

1. die Krümmung κ;
2. den Hauptnormalenvektor ν an diese Kurve;
3. die Evolute m.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Im obenstehenden Bild sind die Spuren der Kurve $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (2\cos(t), \sin(t))$ und ihrer Evolute dargestellt. Berechnen Sie die vier Umkehrpunkte der Evolute.

Aufgabe 4. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine zweimal differenzierbare glatte Kurve, und sei die Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\gamma(t) = g_1(t) + i g_2(t).$$

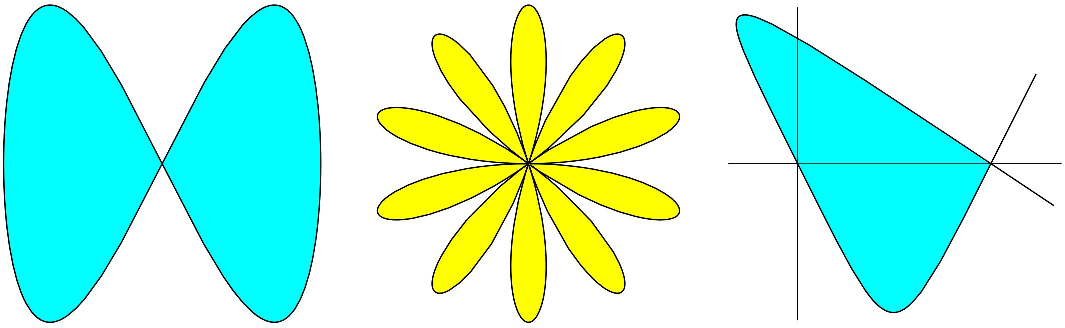
Zeigen Sie, dass für die Krümmung gilt

$$\kappa = \frac{\left|\operatorname{Im}\left(\bar{\gamma}'\gamma''\right)\right|}{|\gamma'|^3}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Flächeninhalte von den Gebieten, die umschlossen werden von

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos t, \sin 2t)$,
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (|\sin(5t)| \cos t, |\sin(5t)| \sin t)$ und
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $h(t) = \left(t^4 - t^3 + t, 2t^3 - 2t\right)$.



Aufgabe 6. Gegeben sei die Kurve $g : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \left(t^3, t^6\right)$. Existiert eine differenzierbare Umparametrisierung auf Bogenlänge?

Aufgabe 7. Wir betrachten die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (2\cos(t), \sin(2t))$. Man kann eine Evolute definieren, die aus zwei Kurven besteht: m_1 als Evolute von $f_1 : \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ mit $f_1(t) = (2\cos(t), \sin(2t))$ und m_2 als Evolute von $f_2 : \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ mit $f_2(t) = (2\cos(t), \sin(2t))$. :

1. Markieren Sie die Spuren von f_1, f_2, m_1 und m_2 im beigefügten Bild.
2. Zeigen Sie $\lim_{t \uparrow \frac{1}{2}\pi} \|m_1(t)\| = \infty$.
3. Die roten Kurven haben neben $(0,0)$ noch zwei weitere Schnittstellen. Berechnen Sie wenn möglich diese Stellen.