Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am 06.05.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Lösungen zu

1. $x'(t) = 4x(t) + \cos(2t)$;
2. $y'(t) = -y(t) + e^{(n+1)t}$, wobei n für die dritte Ziffer Ihrer Matrikelnummer steht.

Aufgabe 2. Sei $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit folgenden Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1 \text{ mit } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \text{ mit } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda_3 = 0 \text{ mit } \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösung zu $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Lösung von:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + 2x_2(t) \\ 2x_2(t) + t^2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie e^{At} für

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} -10 & -4 & -14 \\ 2 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Hinweis zu b): Berechnen Sie A^3.

Aufgabe 5. Seien $A, B \in M^{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

$$\exp(tA + sB) = \exp(tA)\exp(sB) \text{ für alle } t, s \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$AB = BA$$

Hinweis: Setzen Sie $s = t$ und leiten Sie zweimal nach t ab!

(bitte wenden)

Aufgabe 6. Definiere $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t,d) := (1-d)\,e^{t\cdot d}$$

1. In welchen Bereichen der t-d-Ebene ist f positiv, wo negativ? Machen Sie eine Skizze.

2. Betrachten wir nun die Differentialgleichung

   $$d'(t) = f(t,d(t))$$

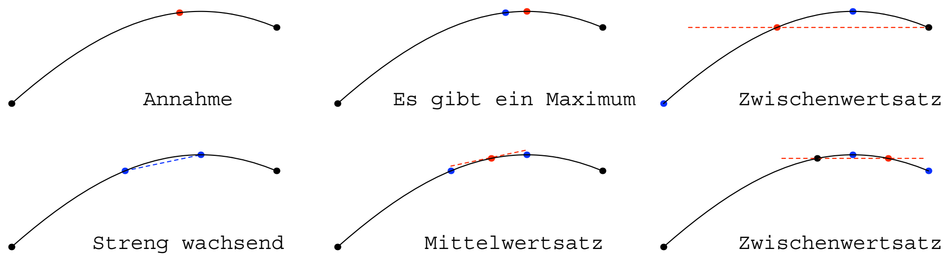
   für $t \in [0,\infty)$. Skizzieren Sie, wie die Lösungen der Differentialgleichung für die Anfangswerte $d_1(0) = 0$, $d_2(0) = 1$ und $d_3(0) = 2$ Ihrer Meinung nach verlaufen (keine Berechnung erforderlich!).

3. Beweisen Sie: Ist $d_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösung obiger Differentialgleichung zum Anfangswert $d_2(0) = 1$, so ist $d_2(t) = 1$ konstant für alle $t \in [0,\infty)$.

Aufgabe 7. Sei $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass jede Lösung $u:(a,b) \to \mathbb{R}$ von

$$u'(x) = F(u(x))$$

eine monotone Funktion ist. Zum Hinweis folgendes Bild:



Hinweis:
Die Übungsgruppe 12 von Markus Becker findet ab der kommenden Woche (5. Mai) in Seminarraum A in der Chemie statt.