Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am 12.05.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wir betrachten die folgenden Systeme von Differentialgleichungen:

a) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)-y(t) \\ x(t)+y(t) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)-y(t)+t^2 \\ x(t)+y(t) \end{pmatrix}$

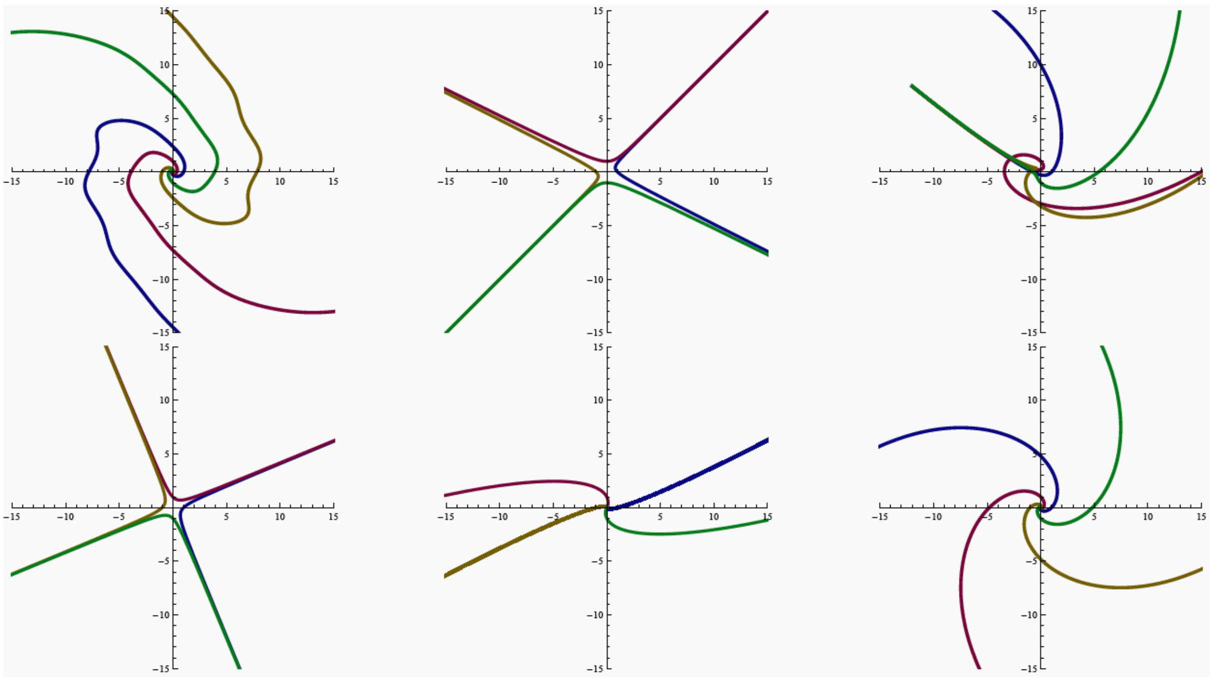
c) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x(t)\cos(y(t))-y(t) \\ x(t)+y(t) \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)+y(t) \\ x(t)-y(t) \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(t)-y(t) \\ x(t)+2y(t) \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x(t)+6y(t) \\ 3x(t) \end{pmatrix}$

In den untenstehenden Abbildungen sind die Spuren der Lösungen zu den Anfangswerten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (für $t_0 = 0$) dargestellt. Welche Abbildung gehört zu welchem System? Geben Sie jeweils auch an, in welchen Richtungen die Spuren durchlaufen werden.



Aufgabe 2. Was kann man über die Stabilität von $x'(t) = Ax(t)$ sagen?

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -13 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 12 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 13 \end{pmatrix}$

Hinweis:
Beachten Sie bitte, dass diese Übungsblatt schon am **Mittwoch**, den 12.5.2010 einzureichen ist.

(bitte wenden)

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u''(t) + u'(t) - 2u(t) = \cos(t), \quad u(0) = -1, \qquad u'(0) = 0$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen zu:

1. $a''(s) + a(s) = e^s$;
2. $v''(y) + v(y) = y\sin(y)$;
3. $u''''(x) + 4u''(x) + 4u(x) = \sin(x)$.

Aufgabe 5. Wir betrachten das System $x'(t) = Ax(t)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

1. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System neutral stabil ist.
2. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System einen stabilen Strudel liefert.
3. Geben Sie ein Paar $a, b \in \mathbb{R}$ an derart, dass das System einen Sattelpunkt liefert.

Aufgabe 6. Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$. Seien darüber hinaus $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und φ ein zugehöriger Eigenvektor.

1. Zeigen Sie, dass $\overline{\lambda}$ ein weiterer Eigenwert von A ist mit Eigenvektor $\overline{\varphi}$.
2. Beweisen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{Re}\,\varphi &= (\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{Re}\,\varphi - (\mathrm{Im}\,\lambda)\,\mathrm{Im}\,\varphi, \\ A\,\mathrm{Im}\,\varphi &= (\mathrm{Im}\,\lambda)\,\mathrm{Re}\,\varphi + (\mathrm{Re}\,\lambda)\,\mathrm{Im}\,\varphi. \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass $\{\mathrm{Re}\,\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi\}$ (linear) unabhängig sind.
4. Verwenden Sie dieses Ergebnis, um ein $T \in M^{2\times 2}(\mathbb{R})$ zu finden derart, dass

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

5. Berechnen Sie $\exp\left(t\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Hinweis: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Der hier gezeigte Weg liefert eine alternative Methode, $\exp\left(t\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$ zu berechnen, ohne viel mit komplexen Zahlen rechnen zu müssen. Dies funktioniert allgemein bei komplexen Eigenwerten.