Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

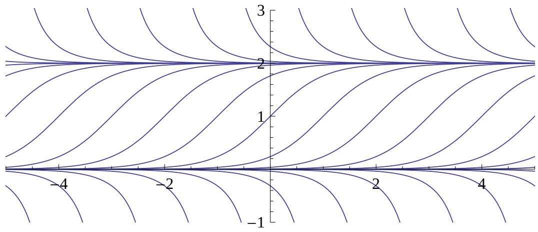
SS 2010

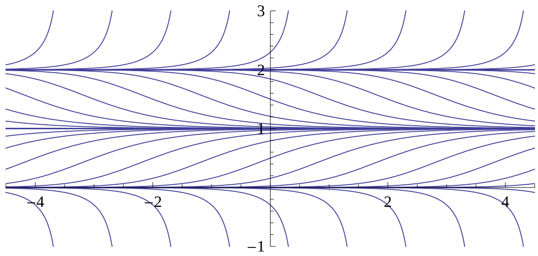
Analysis II
Übungsblatt 5

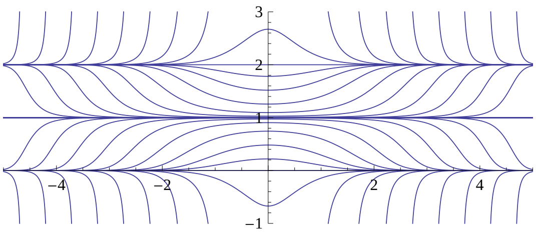
Diese Hausaufgaben werden am 20.05.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Unten sehen Sie vier trennbare Differentialgleichungen und drei Skizzen jeweils einiger Lösungen dieser Gleichungen. Welche gehört wozu? Fertigen Sie eine ähnliche Skizze für die Lösungen der übrigen Differentialgleichung an. *Hinweis:* Denken statt Rechnen spart Zeit.

1. $x'(t) = x(t)\,(1-x(t))\,(2-x(t))$
2. $x'(t) = -t\,x(t)\,(1-x(t))\,(2-x(t))$
3. $x'(t) = -x(t)\,(1-x(t))\,(2-x(t))$
4. $x'(t) = x(t)\,(2-x(t))$







Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Lösungen zu

$$x'(t)x(t) = \frac{(x(t))^2+1}{t+1}.$$

Geben Sie auch jeweils das maximale Intervall an, auf dem die Lösung definiert werden kann.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie die allgemeine Lösung zu

1. $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = e^x.$
2. $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = xe^x + x^2.$
3. $u''(x) + 2u'(x) + u(x) = e^{-x}.$

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Verwenden Sie die Substitution $u(t) = y(e^t)$, um Lösungen zu finden von

1. $x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$,
2. $x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$.

Aufgabe 5. Die Geschwindigkeit v eines Fallschirmspringers, der zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $v(0) = 0$ sein Flugzeug verlässt, genügt der Differentialgleichung

$$v'(t) = -g + c\frac{(v(t))^2}{m}.$$

Hierbei sind g, m und c positive Konstanten. Lösen Sie die Differentialgleichung. Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit bei großer Fallhöhe und damit einhergehender langer Falldauer einer Grenzgeschwindigkeit von $v_G = -\sqrt{\frac{mg}{c}}$ annähert.

Aufgabe 6. Berechnen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(t) = (y(t))^{-4} - t^{-1} y(t).$$

Setzen Sie dazu zunächst $z(t) = (y(t))^q$ und stellen Sie eine Differentialgleichung für z auf. Wählen Sie dann den Exponenten q so, dass die Differentialgleichung für z linear ist und lösen Sie diese.
Bemerkung: Differentialgleichungen vom Typ $x'(t) = a(t)\,(y(t))^p + b(t)y(t)$ heißen *Bernoulli-Differentialgleichungen*.

Aufgabe 7. Auch Differentialgleichungen vom Typ

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

heißen *„homogen"*. Zeigen Sie, dass die Substitution $tu(t) = y(t)$ eine trennbare Differentialgleichung für u liefert. Lösen Sie auf diese Weise die Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{t^2 + (y(t))^2}{2ty(t)}.$$