Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am 02.06.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $A = \left\{(x,y)\,;\,\frac{1}{xy} \in \mathbb{Z} \text{ und } \max\{|x|,|y|\} \leq 1\right\}$. Geben Sie (ohne Beweis) A^o, ∂A, $\bar{A}$, A^{HP} und A^{IP} an.

Aufgabe 2. An welchen Stellen sind folgende Funktionen stetig?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\operatorname{sign}(xy)$, wobei
$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0; \end{cases}$$
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit
$$g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}$$

Hinweis:
Beachten Sie bitte, dass diese Übungsblatt schon am **Mittwoch**, den 02.06.2010 einzureichen ist.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$ sind offen, welche abgeschlossen? Beweisen Sie Ihre Aussage.

1. $\left\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| > 1\right\}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_{1/n}(n,0)$
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} \overline{B_{1/n}(n,0)}$
4. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_{\frac{n+1}{n}}(0,0)$
5. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_{\frac{n}{n+1}}(0,0)$

Aufgabe 4. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. B^o ist die größte offene Teilmenge von B, genauer: $B^o = \bigcup\{A; A \subset B \text{ und } A \text{ offen}\}$
2. $\bar{B}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die B enthält, genauer:
$\bar{B} = \bigcap\{A; A \supset B \text{ und } A \text{ abgeschlossen}\}$

Aufgabe 5. An welchen Stellen sind folgende Funktionen stetig?

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$;
2. $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{Arg}(x+iy)\right)$.

(bitte wenden)

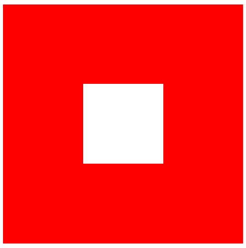
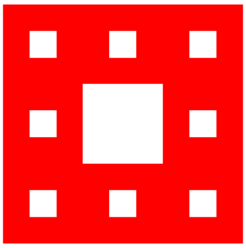
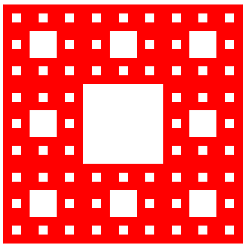
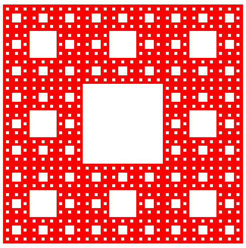
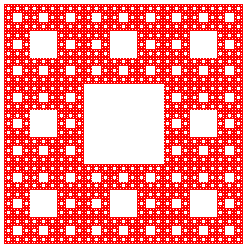
Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine derartige Funktion, dass gilt:

i. $x \mapsto f(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $x = a$ gleichmäßig stetig bezüglich y:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(a,y)| < \varepsilon.$$

ii. $y \mapsto f(x,y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $y = b$ gleichmäßig stetig bezüglich x:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-b| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x,y) - f(x,b)| < \varepsilon.$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig ist in (a,b).
2. Gilt dies auch, wenn statt i die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ nur stetig und nicht gleichmäßig stetig ist?
3. Gilt dies auch, wenn statt i und ii sowohl $x \mapsto f(x,y)$ als auch $y \mapsto f(a,y)$ nur stetig und nicht gleichmäßig stetig sind?

Aufgabe 7. Wir betrachten die abgeschlossenen Teilmengen A_i vom Quadrat $[0,1] \times [0,1]$, die entstehen, indem man das Quadrat in neun gleich große Quadrate zerlegt und dann das Innere des mittleren Quadrates entfernt. Danach wiederholt man die gleiche Prozedur auf den übriggebliebenen Teilquadraten usw. Hier stehen Bilder zu A_1, A_2, A_3, A_4 und A_5:

Formal geht es wie folgt: Man setzt $K = \{(x,y)\,; 0 < x < 1 \text{ und } 0 < y < 1\}$ und für $a,b,r \in \mathbb{R}$:
$$K(a,b,r) = (a,b) + rK = \{(a+rx, b+ry)\,; (x,y) \in K\},$$
und anschließend:
$$\begin{aligned}
A_0 &= \overline{K}, \\
A_1 &= A_0 \backslash K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \\
A_2 &= A_1 \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 2 \\ 0 \le k \le 2}} K\left(\frac{1}{3^2} + \frac{m}{3}, \frac{1}{3^2} + \frac{k}{3}, \frac{1}{3^2}\right), \\
A_3 &= A_2 \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 8 \\ 0 \le k \le 8}} K\left(\frac{1}{3^3} + \frac{m}{3^2}, \frac{1}{3^3} + \frac{k}{3^2}, \frac{1}{3^3}\right), \\
&\ \ldots \\
A_{n+1} &= A_n \backslash \bigcup_{\substack{0 \le m \le 3^n - 1 \\ 0 \le k \le 3^n - 1}} K\left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{m}{3^n}, \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{k}{3^n}, \frac{1}{3^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie, dass $A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abgeschlossen ist und dass $\partial(A_\infty) = A_\infty$.

Wir setzen $B_n(x) = \{y \in \mathbb{R}; (x,y) \in A_n\} \subset \mathbb{R}$.

2. Was können Sie sagen über $B_n = B_n\left(\frac{4}{27}\right)$ und $B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$?
3. Was können Sie sagen über $B_n = B_n\left(\frac{1}{6}\right)$ und $B_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$?
4. Gilt $\left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \in A_\infty$?