Prof. Guido Sweers **SS 2010**
Matthias Erven

Analysis II
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am 10.06.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(6 Punkte)**

1. Geben Sie eine konvergente Teilfolge an von $\left\{\left(\frac{(2i)^n}{1+2^n}, e^{n\pi i/3}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Hat $\left\{\left(\sin(n), \cos\left(n^2\right), (-1)^n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge?

Aufgabe 2. **(8 Punkte)** Wir definieren die folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^\infty := \{f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^+}$:

$$\begin{array}{rrcl} a) & \ell_\infty & := & \{(x_1,x_2,x_3,\dots); x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \sup_{k\in\mathbb{N}^+} |x_k| \in \mathbb{R}\}, \\ b) & c & := & \{(x_1,x_2,x_3,\dots); x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}\}, \\ c) & c_0 & := & \{(x_1,x_2,x_3,\dots); x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}, \\ d) & c_{00} & := & \{(x_1,x_2,x_3,\dots); x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } k > N \implies x_k = 0\}. \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass $(\ell_\infty, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum ist.
2. Gilt dies auch, wenn man ℓ_∞ ersetzt durch c, c_0 bzw c_{00}?
3. Zeigen Sie, dass $(c_{00}, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Vektorraum ist.
4. Gilt dies auch, wenn man c_{00} ersetzt durch c_0, c bzw ℓ_∞?

Aufgabe 3. **(6 Punkte)** Wir betrachten

$$c_1 := \left\{(x_1,x_2,x_3,\dots); x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \lim_{k\to\infty} kx_k = 0\right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $c_1 \subset \ell_\infty$ und dass $c_1 \subset \ell_2$.
2. Gilt auch $c_1 \subset \ell_1$?

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 4. Für $x \in \mathbb{R}^2$ setze man $\|x\|_* = \sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$c_1\|x\|_* \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_* \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Es gilt, dass $\|x\|_3 = \sqrt[3]{|x_1|^3 + |x_2|^3}$ eine Norm ist für $\mathbb{R}^2$. (Wer möchte, kann versuchen, dieses zu beweisen.)

1. Skizzieren Sie die zugehörige Einheitskugel $\left\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_3 < 1\right\}$.

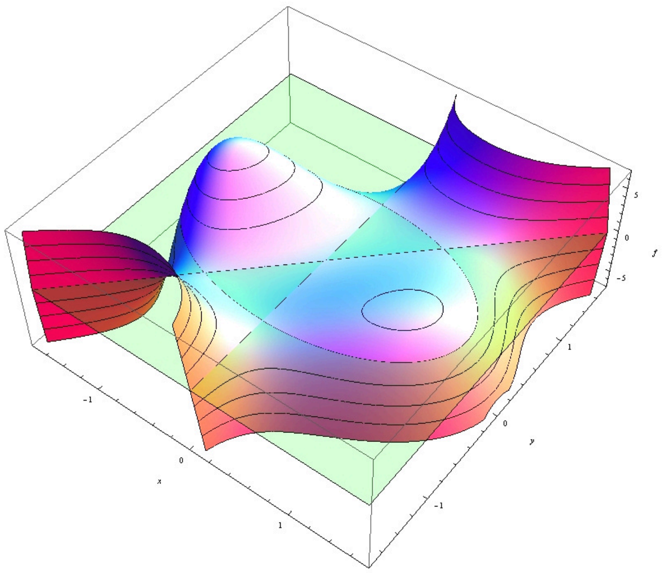
Man definiert für $p \in [1,\infty)$ die Norm $\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p}$ auf $\mathbb{R}^2$. Sei im Folgenden $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Zeigen Sie, dass $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(p) = \|x\|_p$ eine monoton fallende Funktion ist.
3. Zeigen Sie, dass $\|x\|_1 \geq \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$ gilt für $p \in [1,\infty)$.
4. Berechnen Sie $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x\left(3 - 2x + x^2 + y^2\right)(x-y)\left(2 - x^2 - 3y^2\right).$$

1. Berechnen und skizzieren Sie die Menge aller Punkte (x,y) mit $f(x,y) = 0$!
2. Unten ist der Graph der Funktion abgebildet. Betrachten Sie die Komponenten von $\{(x,y); f(x,y) \neq 0\}$. In welchen muss es Stellen geben, an denen f ein lokales Maximum bzw. Minimum annimmt? Welche Eigenschaft von f kommt hierbei ins Spiel?



Veranstaltungshinweis

Am Freitag, den 18. Juni hält Prof. Dr. Peter Dombrowski um 17 Uhr im Hörsaal des Mathematischen Instituts einen Vortrag zum Thema „Orientierte, geschlossene Polyederflächen: Eulers Polyedersatz und ein Gauss-Bonnet-Satz für diese Flächen mit (kombinatorischen) Konsequenzen“. Die Ankündigung zum Vortrag findet man auf der Homepage des Mathematischen Instituts unter „Kalender“ → „Veranstaltungskalender“.

Direkt im Anschluss an den Vortrag lädt die Fachschaft ein:

Am 18.06.10 veranstaltet die Fachschaft wieder eine großes Sommerfest!
Auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts gibt es ab 18.00 Uhr eine tolle Hüpfburg, Kölsch, andere Getränke und Musik. Es wird gegrillt.
Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!