Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2010

Analysis II
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am 17.06.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(5 Punkte)** Wo hat die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \left(1 - x^2 - y^2\right) e^{xy}$$

ihr Maximum?

Aufgabe 2. **(6 Punkte)**

1. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend und $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(A)$ wegzusammenhängend ist.
2. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und $f : A \to \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(A)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 3. **(9 Punkte)** Welche der folgenden Mengen in $\mathbb{R}^2$ sind zusammenhängend/wegzusammenhängend?

1. $A = ((-1,0) \times (-1,0)) \cup ((0,1) \times (0,1))$
2. $A = ((-1,0) \times (-1,0)) \cup \overline{((0,1) \times (0,1))}$
3. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_{2^{-n}}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

4. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} B_{\frac{1}{n}}\left(2^{-n}, 2^{-n}\right)$

Aufgabe 4. Berechnen Sie

1. für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2) = e^{x_1 \sin x_2}$ die Ableitungen $\partial_1 f(1,\pi)$, $\partial_1\partial_2 f(1,\pi)$ und $\partial_1\partial_2\partial_1 f(1,\pi)$.
2. für $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit
$$g(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{für } x \geq 0 \\ -|x|^y & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
die Ableitungen $\partial_1 g$ und $\partial_2 g$ überall, wo sie existieren.
3. für $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$$
die Jacobimatrix in (r,φ,θ).

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Geben Sie jeweils ein Beispiel an für

- eine stetige Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränktem I, die kein Extremum hat.
- eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die kein Extremum hat.
- eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die unendlich viele lokale Minima hat.
- eine offene Überdeckung von $(0,1)$, aus der sich keine endliche Teilüberdeckung auswählen lässt.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Folge

$$x^1 = (2,0,0,0,\dots),\ x^2 = (0,2,0,0,\dots),\ x^3 = (0,0,2,0,\dots)\dots,$$

das heißt $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $x_l^k = 2\delta_{kl}$ (dieses sogenannte Kronecker-Delta ist definiert durch $\delta_{kl} = 0$ für $k \neq l$ und $\delta_{kl} = 1$ für $k = l$) in $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$.

1. Zeigen Sie, dass diese Folge beschränkt ist.
2. Hat diese Folge eine konvergente Teilfolge?
3. Ist $K := \{x \in \ell_\infty; \|x\|_\infty \leq 2\}$ in $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ folgenkompakt?
4. Sei $I := \{y \in \ell_\infty; y_i \in \{-2,2\}$ für alle $i \in \mathbb{N}^+\}$. Zeigen Sie, dass $\{B_3(y); y \in I\}$ die Menge K überdeckt.
5. Kann man aus $\{B_3(y); y \in I\}$ eine endliche Teilmenge wählen, die K überdeckt?