Prof. Guido Sweers **SS 2010**
Matthias Erven

Analysis II
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am 24.06.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der drei Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(6 Punkte)** Untersuchen Sie die Definitheit der folgenden Matrizen. $p_M(\lambda)$ bezeichnet das jeweilige charakteristische Polynom.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4 \qquad p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 \qquad p_C(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda$$

Aufgabe 2. **(4 Punkte)** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$. Hat diese Funktion ein Minimum in $(0,0,0)$?

Aufgabe 3. **(10 Punkte)** Sind die folgenden Funktionen differenzierbar in $(0,0)$?

1. $f(x,y) = \max\left(x^2, y^2\right)$;
2. $g(x,y) = \min(|x|, |y|)$;

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

3. $h(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$;
4. $k(x,y) = \cos(|x| + |y|)$.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wahr oder nicht wahr?
Wenn f differenzierbar ist in a, dann ist f stetig in einer Umgebung von a.

Aufgabe 5. Wir betrachten $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\|(x,y)\|^\alpha} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

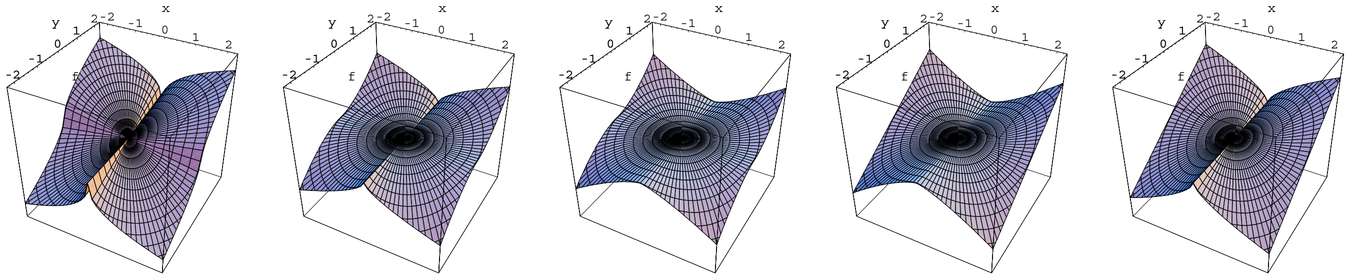
Baestimmen Sie diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die gilt:

1. f_α ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.
2. f_α hat partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.
3. f_α hat stetige partielle Ableitungen auf $\mathbb{R}^2$.
4. f_α ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.
5. f_α ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.

(bitte wenden)

Aufgabe 6. Fünf Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f_1(x,y) = y\sqrt[3]{x^4},\ f_2(x,y) = y\sqrt[3]{x^2},\ f_3(x,y) = \sqrt[3]{x^4y^5},\ f_4(x,y) = \sqrt[5]{x^2y^3},\ f_5(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^5}.$$



1. Welche Skizze gehört zu welcher Funktion?
2. Welche dieser Funktionen sind partiell differenzierbar in $(0,0)$?
3. Für welche dieser Funktionen existiert $\partial_u f_i(0,0)$ mit $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$?
4. Welche dieser Funktionen sind differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Schreiben Sie aus:

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(ye^x, xe^y)\right)$;
2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(xf(x,x^2)\right)$;
3. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x, f(x,y))\right)$.

Aufgabe 8. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man homogen vom Grad $p > 0$, wenn $f(tx) = t^p f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass folgendes gilt, wenn f außerdem differenzierbar ist:

$$x \cdot (\nabla f)(x) = p\, f(x).$$