NAME: AUFGABE 1

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{1+\|x\|^2}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

NAME:

AUFGABE 2

2. Ist folgende Menge $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra?

$$\mathcal{A} = \bigcup_{-\infty \leq a < b \leq \infty} \{(a, b)\} \quad \cup \bigcup_{-\infty < a < b \leq \infty} \{[a, b)\} \quad \cup \bigcup_{-\infty \leq a < b < \infty} \{(a, b]\} \quad \cup \bigcup_{-\infty < a < b < \infty} \{[a, b]\}$$

NAME: AUFGABE 3

3. Betrachten wir die Funktionenfolge $\{f_k : [0,1] \to \mathbb{R}\}_{k=1}^{\infty}$, definiert durch $f_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx}$. Wir untersuchen Konvergenz für $k \to \infty$.

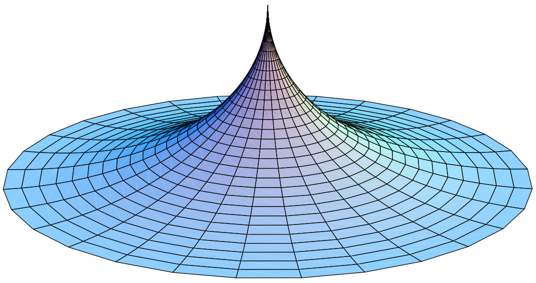
   (a) Konvergiert f_k λ-fast überall auf $[0,1]$?

   (b) Für welche $p \in [1, \infty)$ konvergiert f_k in $L^p\,[0,1]$?

   (c) Konvergiert f_k nach dem Lebesgue-Maß auf $[0,1]$?

Name:	Aufgabe 4	

4. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt von



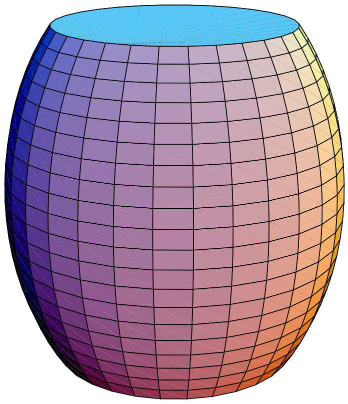
$$\left\{ (x,y,z);\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-\sqrt{r}+\frac{1}{3}r\sqrt{r} \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le r \le 1 \text{ und } \varphi \in [0,2\pi] \right\}.$$

NAME:		**AUFGABE 5**	

5. Wie viele Liter Bier gehen in ein Fass, dessen Innenraum gegeben ist durch

$$F = \left\{ (x, y, z)\,;\, 2\left(x^2 + y^2\right) + (z-1)^2 \leq 2 \text{ und } 0 \leq z \leq 2 \right\}?$$

Die Größen x, y, z sind Meterangaben.



NAME:	AUFGABE 6	

6. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.

(b) Jede stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.

(c) Zu jeder $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbaren Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gibt es eine Teilmenge $K \subset (0,1)$ mit $\lambda(K) = 0.99$, so dass f auf K stetig ist.

(d) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Aus $\int_{[0,1]} |f| \, d\lambda = 0$ folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

(e) Wenn $f \in L^3(0,1)$, dann gilt auch $f \in L^2(0,1)$.

Name:	Aufgabe 7	

7. Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^2$.

   (b) Jede Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

   (c) Jede abzählbare Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

   (d) Jede endliche Vereinigung von Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

NAME:	AUFGABE 8	

8. (a) Wann heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^4$?

   (b) Ist $\|\cdot\| : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|x\| = |x_1 + x_2| + \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$, eine Norm auf $\mathbb{R}^4$?

NAME:	**AUFGABE 9**	

9. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, n \, \mathbf{1}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}$.

   (a) Ist f Riemann-integrierbar?

   (b) Ist f uneigentlich Riemann-integrierbar?

   (c) Ist f Lebesgue-integrierbar?

NAME: | AUFGABE 10

10. Sei $\omega \in \Omega_1^2(\mathbb{R}^n)$.

(a) Kann man ein solches ω wie folgt schreiben?

$$\omega = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} f_{ij}\, dx_i \wedge dx_j, \tag{1}$$

wobei die $f_{ij} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ sind.

(b) Wie ist die äußere Ableitung von ω in (1) definiert?

(c) Sei $n \geq 3$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$. Sei $\omega = x_1 x_3\, dx_1 \wedge dx_2$. Berechnen Sie

$$d\omega(e_1, e_2, e_3).$$