Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2007/08

Analysis III
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 29.10.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(Y,\mathcal{S})$ zwei topologische Räume. Eine Funktion $f: X \to Y$ heißt $\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$-stetig, wenn für jedes $S \in \mathcal{S}$ gilt, dass $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}$.
Seien $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ und $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ die zugehörigen σ-Algebren. Zeigen Sie, dass jede $\mathcal{T}$-$\mathcal{S}$-stetige Funktion $\mathcal{A}_\mathcal{T}$-$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-messbar ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Geben Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die folgendes erfüllt:

1. f ist Borel-messbar;
2. f ist unstetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Sei $(X,\mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Mengenfunktion $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ heißt σ-subadditiv, wenn für jede Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Ähnlich nennt man μ subadditiv, wenn für endlich viele $A_1,\ldots,A_k \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

Beweisen oder widerlegen Sie die einzelnen Behauptungen für eine Mengenfunktion $\mu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mu \text{ ist } \sigma\text{-additiv} & \Rightarrow & \mu \text{ ist } \sigma\text{-subadditiv} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mu \text{ ist additiv} & \Rightarrow & \mu \text{ ist subadditiv} \end{array}$$

Aufgabe 4. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass dann für $A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq n_1<n_2<\cdots<n_k\leq n} \mu(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{n_\ell})$$

Aufgabe 5. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass μ_B definiert durch

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

ein Maß ist für $(X,\mathcal{A})$.