

Analysis III  
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 05.11.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.** Wir definieren für  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ :

$$v(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ \min \{m - n; m, n \in \mathbb{Z} \text{ und } A \subset [n, m]\} & \text{falls } A \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

1. Ist  $v$  ein äußeres Maß auf  $\mathbb{R}$ ?
2. Ist  $v$  ein Maß auf  $\mathbb{R}$ ?

**Aufgabe 2.** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf  $X$ . Man definiere für  $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu_*(A) := \inf \{ \mu^*(B) - \mu^*(B \cap A^c); B \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } A \subset B \text{ und } \mu^*(B \cap A^c) < \infty \}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$  gilt.
2. Zeigen Sie, dass  $\mu_*(A) = \mu^*(A)$  gilt für  $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $h_1^*$  das äußere Hausdorff-Mass. Zeigen Sie:

1. Für einen Polygonzug  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$  mit  $x_i \in \mathbb{R}^2$  gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = h_1^*(p(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

2. † Für stetig differenzierbare  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gilt

$$\text{Bogenlänge}(\gamma) = h_1^*(\gamma[0, 1]).$$

(bitte wenden)

---

† unbewertete Zusatzaufgabe

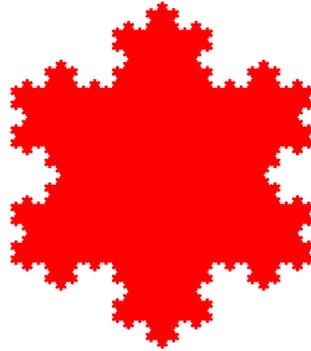
**Aufgabe 4.** Sei  $h_s^*$  das äußere Hausdorff-Mass mit  $s \in [0, n]$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie:

1. Wenn  $0 \leq s < t \leq n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist derart, dass  $h_s^*(A) < \infty$  ist, dann gilt  $h_t^*(A) = 0$ .
2. Wenn  $0 \leq s < t \leq n$  und  $A \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist derart, dass  $h_t^*(A) > 0$  ist, dann gilt  $h_s^*(A) = \infty$ .
3. Für jedes beschränkte  $A \subset \mathbb{R}^n$  gibt es genau ein  $s_A \in [0, n]$  derart, dass

$$h_s^*(A) = 0 \text{ für } s > s_A \text{ und } h_s^*(A) = \infty \text{ für } s < s_A.$$

Man nennt  $s_A$  die Hausdorff-Dimension von  $A$ .

4. Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension der Kochschen Schneeflocke (Koch's snowflake). Damit wird der Rand (!) der folgenden Figur bezeichnet:



Die Definition der Kochschen Schneeflocke findet man im letzten Kapitel der Notizen zur Vorlesung Analysis 1.