Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2007/08

Analysis III
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 12.11.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wir definieren für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 \text{ falls } A = \emptyset \\ \min\{m-n;\ m,n \in \mathbb{Z} \text{ und } A \subset [n,m]\} \text{ falls } A \text{ beschränkt} \\ \infty \text{ falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

und setzen

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \nu(A_i); \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset A\right\}.$$

1. Ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$?
2. Ist μ^* ein Maß auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2. Die Cantor-Menge C ist definiert durch

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right).$$

Ausführlicher gesagt teilt man $C_0 = [0,1]$ in 3 gleich große Intervalle und behält nur das linke und das rechte: $C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]$. Dies wiederholt man für die beiden Intervalle in C_1 und bekommt $C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$ usw. Schließlich setzt man $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C Lebesgue-messbar ist und dass $\lambda(C) = 0$.

Die fette Cantor-Menge $C^\bullet$ ist ähnlich definiert. Statt beim n-ten Schritt in der Mitte ein offenes Interval der Länge 3^{-n} zu entfernen, entfernt man nun ein offenes Intervall der Länge 4^{-n}:

$$C_0^\bullet = [0,1],\ C_1^\bullet = \left[0,\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8},1\right],\ C_2^\bullet = \left[0,\frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32},\frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8},\frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32},1\right] \text{ usw.}$$

Man setzt $C^\bullet = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^\bullet$.

(b) Zeigen Sie, dass $C^\bullet$ Lebesgue-messbar ist und berechnen Sie $\lambda(C^\bullet)$.

Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, wenn es für jedes $x \in X$ eine Folge $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ gibt derart, dass $\|x - a_i\| \to 0$ für $i \to \infty$. Anders gesagt bedeutet dies $\overline{A} = X$. Eine Teilmenge A heißt nirgends dicht, wenn $\left(\overline{A}\right)^o = \emptyset$.

(c) Zeigen Sie dass C und $C^\bullet$ nirgends dicht sind.

Aufgabe 3. Sei $d(.,.)$ die Distanzfunktion zweier Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man beweise oder widerlege:

1. $d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
2. $d(A\cup B,C) \le \min(d(A,C),d(B,C))$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. $d(A\cap B,C) \le \max(d(A,C),d(B,C))$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß verschiebungs- und rotationsinvariant ist.