Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2007/08

Analysis III
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 19.11.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion. Zeigen Sie: Ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\frac{1}{f}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbar.

Aufgabe 2. Wir betrachten

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten*:

i. Ist f_i (uneigentlich) Riemann-integrierbar über $[0,1]$?

ii. Ist f_i Lebesgue-integrierbar über $[0,1]$?

Hinweis zu f_3: Betrachten Sie $\int_{((2n+1)\pi)^{-1}}^{1} f_3(x)dx$ und $\int_{(2n\pi)^{-1}}^{1} f_3(x)dx$ für $n \in \mathbb{N}^+$.

Aufgabe 3. Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_\mathcal{T}$-messbare Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man

$$f_n := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \mathbf{1}_{\{x \in X; k \cdot 2^{-n} \leq f(x)\}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}_n := f_n + 2^{-n}.$$

Zeigen Sie:

1. f_n und $\tilde{f}_n$ sind einfach und $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbar.

2. $f_n \leq f \leq \tilde{f}_n$.

3. Wenn f beschränkt ist und $\lambda(X) < \infty$, ist f Lebesgue-integrierbar.

4. Eine stetige Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ auf einer kompakten Menge ist Lebesgue-integrierbar.

---

*Für die richtige Lösung zu f_1 und f_2 gibt es zusammen 5 Punkte, für die richtige Lösung zu f_3 nochmals 5 Punkte.