

Analysis III  
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 03.12.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

**Aufgabe 1.** Richtig oder falsch?

1. Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f_k(x) = kx^{k-1}$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda.$$

- 2.

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x} dx \right) = \int_0^\infty \left( \frac{d}{dt} \frac{\sin(xt)}{x} \right) dx.$$

- 3.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{k x^{3/2}}{k x^2 + 1} dx = 2.$$

- 4.

$$\int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x t^2}{t^4 + x^4} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x t^2}{t^4 + x^4} dx.$$

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{x t^2}{t^4 + x t^2 + x^6} dx.$$

Hinweis:  $\frac{x t^2}{t^4 + x t^2 + x^6} \leq \min(1, x^{-2})$ .

**Aufgabe 3.** Die Menge aller stetig differenzierbaren Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man  $C^1 [0, 1]$ .

1. Zeigen Sie, dass  $p : C^1 [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

eine Seminorm auf  $C^1 [0, 1]$  ist.

2. Zeigen Sie, dass gleiches  $p$  eingeschränkt auf  $C_{R_0}^1 [0, 1] := \{f \in C^1 [0, 1]; f(0) = 0\}$  eine Norm ist.

3. Wir setzen

$$\|f\|_1 = p(f) + |f(0)| \quad \text{und} \quad \|f\|_2 = p(f) + \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalente Normen auf  $C^1 [0, 1]$  sind.

**Aufgabe 4.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = |x|^\alpha (1 + |x|)^\beta$ . Für welche  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ?  
Hinweis: In  $\mathbb{R}^n$  gilt  $\int_{B_R(0)} g(|x|) dx = \omega_n \int_0^R g(r) r^{n-1} dr$ , wobei  $\omega_n$  für den Oberflächeninhalt der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel steht.

(bitte wenden)

**Hinweis des Diplomprüfungsamtes (Raum 135, Math. Institut) für Studierende der Mathematik/Wirtschaftsmathematik (Vordiplom, nicht Erstsemester)**

**mit Nebenfach BWL oder VWL:**

Die Anmeldung für eine der Klausuren

Bilanz und Erfolgsrechnung

Kosten- und Leistungsrechnung

Investition und Finanzierung

Marketing (= Beschaffung, Produktion und Absatz)

Operations Management (=OR)

Technik des betrieblichen Rechnungswesens

Grundzüge der Mikroökonomik

Grundzüge der Makroökonomik

kann nur vorgenommen werden am

**Mittwoch, 9.1.08, Mittwoch, 16.1.08, und Montag, 21.1.08,**

**jeweils 14-16 Uhr in Raum 135, Math. Institut.**

**Bitte möglichst einen der ersten beiden Termine wahrnehmen.**

Bitte beachten Sie vorher die an der Tür von Raum 135 ausgehängten Formulare, die Sie aus dem Internet unter der Adresse

[http://www.wiso.uni-koeln.de/pa/asp/meld\\_andere\\_907.asp](http://www.wiso.uni-koeln.de/pa/asp/meld_andere_907.asp) ( Mathematik)

[http://www.wiso.uni-koeln.de/pa/asp/meld\\_andere\\_908.asp](http://www.wiso.uni-koeln.de/pa/asp/meld_andere_908.asp) (Wirtschaftsmathematik)

erhalten und auszufüllen haben. Bringen Sie, falls Sie sich bisher zu keiner Prüfungsleistung im Rahmen des Vordiploms gemeldet haben, zur Anmeldung auch Studienbuch, Studentenausweis, Abiturzeugnis und Lebenslauf mit. Falls Sie bereits Prüfungsleistungen in BWL oder VWL erbracht haben, bringen Sie bitte einen Übungsschein zu Analysis oder Lin. Algebra mit.

Ein Rücktritt von einer dieser Klausuren ist bis eine Woche vor Klausurdatum schriftlich möglich.