Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2007/08

Analysis III
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 10.12.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Für $p \in [1,\infty)$ sei $\ell_p = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^p < \infty\}$.

1. Zeigen Sie, dass $(\ell_p, +, \mathbb{R}, .)$ ein Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   eine Norm ist auf ℓ_p.
3. Zeigen Sie, dass $\left(\ell_p, +, \mathbb{R}, ., \|\cdot\|_p\right)$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 2. Seien $p,q \in [1,\infty]$ und ℓ_p wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für $f \in \ell_p$ und $g \in \ell_q$ folgendes gilt:

1. $f+g \in \ell_r$ für alle $r \in [\max(p,q), \infty]$.
2. $fg \in \ell_r$ für alle $r \in \left[\frac{pq}{p+q}, \infty\right]$ falls $\frac{pq}{p+q} \geq 1$.
3. Geben Sie ein Beispiel an mit $f \in \ell_p$, $g \in \ell_q$ und $fg \notin \ell_r$ für $r < \frac{pq}{p+q}$.

Aufgabe 3. Seien $p,q \in [1,\infty)$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Lebesgue-messbare Menge: $X \subset B_R(0)$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$ folgendes gilt:

1. $f+g \in \mathcal{L}^r(X)$ für alle $r \in [1, \min(p,q)]$.
2. $fg \in \mathcal{L}^r(X)$ für alle $r \in \left[1, \frac{pq}{p+q}\right]$ falls $\frac{pq}{p+q} \geq 1$.
3. Geben Sie ein Beispiel an mit $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^q(X)$ und $fg \notin \mathcal{L}^r(X)$ für $r > \frac{pq}{p+q}$.
4. Kann man ähnliche Ergebnisse zeigen für den Fall $\lambda(X) = \infty$?

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Wir betrachten $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$.

1. Zeigen Sie: $\sup\{|f(x)|; x \in K\} = \text{ess-sup}_K |f|$ für $f \in C(K)$.
2. Zeigen Sie: $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty = \text{ess-sup}_K |f|$ ist eine Norm für $C(K)$.
3. Zeigen Sie: $C(K)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum.
4. Zeigen Sie: $C(K)$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{L}^\infty(K)$.
5. Die natürliche Abbildung $I : \mathcal{L}^\infty(K) \to L^\infty(K)$ definiert durch $I(f) = \mathbf{f}$, wobei f ein Vertreter von $\mathbf{f}$ ist, ist nicht ein-eindeutig. Zeigen Sie: $I : C(K) \to L^\infty(K)$ ist ein-eindeutig.
6. Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$. Ist $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty = \text{ess-sup}_B |f|$ eine Norm für $C(B)$?

Aufgabe 5. * Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, ungerade und streng monoton wachsend, und sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann ist $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)ds$ eine gerade und konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\Phi,X}$, definiert durch

$$\|f\|_{\Phi,X} := \inf\left\{k > 0; \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\lambda < 1\right\},$$

eine Seminorm ist auf $\mathcal{L}^\infty(X) \cap \mathcal{L}^1(X)$.
Diese (Semi-) Norm heißt Luxemburg-Norm. Für $\Phi(t) = |t|^p$ bekommt man wieder $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$.

---

*unbewertete Zusatzaufgabe