

Analysis III
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am Montag, den 17.12.07 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{V'}$ definiert durch

$$\|T\|_{V'} = \sup \left\{ \frac{|Tv|}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\}$$

eine Norm auf V' ist.

2. Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_V$ eine Seminorm auf V dergestalt, dass $\|v\|_V \neq 0$ für mindestens ein $v \in V$ ist. Sei V' der Vektorraum der linearen Abbildungen $T : V \rightarrow \mathbb{R}$, für die es ein $M_T > 0$ gibt mit $|Tv| \leq M_T \|v\|_V$ für alle $v \in V$. Ist $\|\cdot\|_{V'}$ definiert durch

$$\|T\|_{V'} = \sup \{ |Tv|; v \in V \text{ mit } \|v\|_V = 1 \}$$

eine Seminorm oder sogar eine Norm auf V' ?

Aufgabe 2. Beantworten Sie für untenstehende Funktionen die folgenden Fragen *:

1. Ist die Abbildung wohldefiniert? Und wenn ja:
2. Ist die Abbildung linear?
3. Ist die Abbildung stetig?
 - i. $P : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ mit $P(f)(x) = f(x) + f(-x)$
 - ii. $R : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ mit $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$
 - iii. $S : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ mit $S(f)(x) = \sqrt{\|f\|_{L^1} |f(x)|} \text{sign}(f(x))$
 - iv. $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ mit $T(f)(x) = \frac{1}{1+x^2} f(x)$

Aufgabe 3. Der Darstellungssatz von Riesz gilt für $L^p(X)$ mit $p \in [1, \infty)$. Ist die Abbildung $g \mapsto T_g : L^\infty(X) \rightarrow (L^1(X))'$ mit $T_g : L^1(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$T_g(f) = \int_X fg \, d\lambda$$

eine Isometrie?

Aufgabe 4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Berechnen Sie das n -dimensionale Volumen von

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq x_{m+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

*Um die volle Punktzahl für diese Aufgabe zu erhalten, müssen Sie nur 80 Prozent der Fragen richtig beantworten.