Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2007/08

Analysis III
Sonderübungsblatt

1. Berechnen Sie:

   (a) Für $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \le 1\}$ das Integral
   $$\int_{\partial B_1(0)} \left(x_1^2 + x_2 - 2x_3\right) d\sigma,$$
   wobei $d\sigma$ das Oberflächendifferential ist.

   (b) Für $H = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1 \text{ und } x_3 < 0\}$ das Integral
   $$\int_H \operatorname{rot} \begin{pmatrix} 1+xz \\ 2+xy \\ 3+yz \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$
   Hierbei steht $\mathbf{n}$ für den nach außen gerichteten Normalenvektor.

   Beide Integrale lassen sich sowohl direkt als auch mit einem Integralsatz berechnen; der eine Weg bedeutet mehr Denk-, der andere mehr Rechenarbeit.

2. Wir betrachten $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln(\|x\|)$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\Delta F = 0$ gilt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

   (b) Sei $g \in C^2(\overline{B_1(0)})$. Zeigen Sie, dass
   $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\partial F}{\partial r}(x)\;\; g(x)\; d\sigma = -g(0)$$
   und
   $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} F(x)\, \frac{\partial g}{\partial r}(x)\;\; d\sigma = 0$$
   gilt. Hierbei ist der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial r}(x)$ für $x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ definiert durch
   $$\frac{\partial f}{\partial r}(x) := \frac{\partial f}{\partial r}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

   (c) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so dass ∂D eine Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie für $f, g \in C^2(\overline{D})$:
   $$\int_D \nabla f \cdot \nabla g \, d\lambda = \int_{\partial D} f\, \nabla g \cdot \mathbf{n} d\sigma - \int_D f \Delta g \, d\lambda$$

   (d) Nehmen wir nun an, dass $\Delta g = 0$ auf $\overline{B_1(0)}$ gilt. Verwenden Sie das Integral $\int_{B_1(0)\setminus B_\epsilon(0)} \nabla F \cdot \nabla g \, d\lambda$, um zu zeigen, dass
   $$\frac{1}{2\pi} \int_{\|x\|=1} g(x)\; d\sigma = g(0)$$
   und
   $$\frac{1}{\pi} \iint_{\|x\| \le 1} g(x)\; dx = g(0).$$

(bitte wenden)

3. Zeigen Sie für $v \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$:

   (a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$;

   (b) $\operatorname{div}(fv) = f\ \operatorname{div} v + (\operatorname{grad} f)\cdot v$;

   (c) $\operatorname{rot}(fv) = f\ \operatorname{rot} v + (\operatorname{grad} f)\times v$.

4. Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ und sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ mit Rand ∂M. Zeigen Sie:

   (a) $\int_{\partial M} \operatorname{grad} f \cdot \tau ds = 0$;

   (b) $\iint_M (\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g)\cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial M} f\ \operatorname{grad} g \cdot \tau ds$.

5. Sei $n \geq 3$. Sei M eine abgeschlossene $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$, die eine eindeutige Projektion auf die Einheitssphäre um O hat. Den Raumwinkel $\Omega(M)$ von M bezüglich O definiert man als den Inhalt der Oberfläche dieser Projektion. Zeigen Sie
$$\Omega(M) = \int_M \|x\|^{-n}\, x \cdot \mathbf{n}\; dM.$$

   Hinweise:

   - Nehmen Sie $r \in (0,1]$ mit $B_r(0) \cap M = \emptyset$ und wenden Sie den Satz von Gauß an auf
$$U = \left\{ \theta_x \frac{x}{\|x\|}; x \in M \text{ und } \theta_x \in [r, \|x\|] \right\}.$$
     Zeigen Sie anschließend, dass das Ergebnis nicht von r abhängt.
   - Es gilt $\|x\|^{-n} x = \frac{1}{2-n} \nabla \|x\|^{2-n}$.