

Notizen zur Vorlesung

Analysis III



G. Sweers

Wintersemester 2010-2011

Inhaltsverzeichnis

1	Teilmengen und Strukturen	1
1.1	Topologie, Metrik und Norm	1
1.2	Basis und Produkt bei Topologien	4
1.3	σ -Algebra	6
1.4	Topologie und σ -Algebra	8
2	Maße I	9
2.1	Stetige Funktionen	9
2.2	Messbare Funktionen	10
2.3	Definition eines Maßes	11
2.4	Nullmengen und Vollständigkeit	15
3	Maße II	17
3.1	Äußeres Maß	17
3.1.1	Das äußere Lebesgue-Maß	18
3.1.2	Äußere Hausdorff-Maße	19
3.2	Vom äußeren Maß zum Maß	21
4	Lebesgue-Maß	25
4.1	Lebesgue-Maß und Borel-Mengen	25
4.2	Approximieren von Aussen und von Innen	28
4.3	Nicht alles ist Lebesgue-messbar	30
5	Lebesgue-Integral	33
5.1	Definition des Lebesgue-Integrals	33
5.1.1	Für einfache Funktionen	33
5.1.2	Für allgemeinere Funktionen	35
5.2	Von stetig zu integrierbar	38
5.3	Kombinationen messbarer Funktionen	39
5.4	Von integrierbar zu fast stetig	40
5.5	Eigenschaften des Lebesgue-Integrals	42
6	Konvergenz in Sorten	45
6.1	Lebesgue-Klassen	45
6.2	Konvergenz bei messbaren Funktionen	46
6.3	Egoroff's Konvergenzsatz	49
6.4	Integrale mit Werten in $[0, \infty]$	51

7	Limes und Integral	53
7.1	Das Lemma von Fatou	53
7.2	Monoton oder majorisiert	54
7.3	Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$	56
7.4	Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$	58
7.5	Die Ungleichung von Hölder	59
8	Die Lebesgue-Räume	63
8.1	Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(X)$	63
8.2	Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^\infty(X)$	65
8.3	Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^2(X)$	67
8.4	Stetige lineare Abbildungen	67
8.5	Der Darstellungssatz von Riesz	70
9	Berechnen der Integrale	73
9.1	Einleitung	73
9.2	Fubini und Tonelli	74
9.3	Transformationen	76
9.4	Kugeln und Zylinder	80
10	Mannigfaltigkeiten I	83
10.1	Definition einer Mannigfaltigkeit	83
10.2	Heuristik und Mathematik	85
10.3	Integral über eine Mannigfaltigkeit	89
11	Mannigfaltigkeiten II	91
11.1	Immersionen	91
11.2	Lokale Karten und Parametrisierungen	95
11.3	Vektorfelder und Pfaffsche Formen	96
11.3.1	Der Tangentialraum	97
11.3.2	Der Kotangentialraum	98
11.3.3	Dualität	99
12	Differentialformen I	101
12.1	Multilineare Algebra	101
12.2	Determinante	104
12.3	Skalarprodukt und Orientierung	104
12.4	Hodge-Operator	107
12.5	Differentialformen zurückziehen und ableiten	109
12.6	Wieso?	112
12.7	Gradient, Divergenz und Rotation in \mathbb{R}^n	112
12.8	Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes	113
13	Differentialformen II	117
13.1	Geschlossene und exakte Differentialformen	117
13.2	Standardvolumen	118
13.3	Grad, Div und Rot auf Mannigfaltigkeiten	121

14 Gauß und Stokes	125
14.1 Integration von Differentialformen	125
14.2 Beweis des Stokeschen Satzes	128
14.3 Beweis des Integralsatzes von Gauß	129
14.3.1 Ein Beispiel	131
14.4 Beweis des klassischen Stokeschen Satzes	131
14.4.1 Ein Beispiel	133

Analysis 3, Woche 1

Teilmengen und Strukturen



1.1 Topologie, Metrik und Norm

Definition 1.1 Sei X irgendeine Menge. Die Menge aller Teilmengen von X nennt man Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$:

$$\mathcal{P}(X) = \{A; A \subset X\}.$$

Bemerkung 1.1.1 Der Grund, dass man $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge nennt, ist folgender. Wie $\mathbb{R}^5 = \mathbb{R}^{\{1,2,3,4,5\}}$ die Abbildungen von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ nach \mathbb{R} beschreibt (die 5 Koordinaten), wird $\{0, 1\}^X$ aufgefasst als die Abbildungen von X nach $\{0, 1\}$. Man findet eine direkte Bijektion zwischen $\mathcal{P}(X)$ und $\{0, 1\}^X$ indem man $A \in \mathcal{P}(X)$ und $f \in \{0, 1\}^X$ identifiziert durch

$$\begin{aligned}x \in A &\Leftrightarrow f(x) = 1, \\x \notin A &\Leftrightarrow f(x) = 0.\end{aligned}$$

Beispiel 1.2 Für $X = \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\}$ hat man

$$\mathcal{P}(X) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \{\clubsuit\}, \{\diamond\}, \{\heartsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond\}, \{\clubsuit, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamond, \heartsuit\}, \{\diamond, \spadesuit\}, \\ \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamond, \heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\} \end{array} \right\}$$

Bei endlichen Mengen ist $\mathcal{P}(X)$ sehr übersichtlich. Wenn X unendlich viele Elemente hat, ist $\mathcal{P}(X)$ im allgemeinen viel zu groß um vernünftige Aussagen machen zu können. Dazu brauchen wir mehr Struktur. Eine solche Struktur in \mathbb{R}^n bietet die Klasse der offenen Mengen. Allgemeiner definiert man folgendes:

Definition 1.3 Eine Teilmenge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Topologie** für X , falls

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
2. $A_i \in \mathcal{T}$ für $i = 1, \dots, k \implies \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i \in \mathcal{T}$,
"der Schnitt endlich vieler gehört auch dazu".
3. $A_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I \implies \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$,
"die Vereinigung beliebig vieler gehört auch dazu".

Bemerkung 1.3.1 (X, \mathcal{T}) nennt man einen **topologischen Raum**. Die Elemente von \mathcal{T} nennt man die **\mathcal{T} -offenen Mengen**.

Bemerkung 1.3.2 Für jede Menge $X \neq \emptyset$ gibt es zwei triviale Topologien: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ und $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$.

Man erinnere sich, dass eine derartige Eigenschaft gilt für \mathcal{T} die Menge aller offenen Teilmengen in $X = \mathbb{R}^n$: Vereinigungen und endliche Schnitte von offenen Mengen sind wieder offen. Anders gesagt, die offenen Mengen in \mathbb{R}^n bilden eine Topologie. Diese Topologie \mathcal{T} nennt man **Standardtopologie** auf \mathbb{R}^n .

Eine genauere Struktur bietet folgendes:

Definition 1.4 Sei X eine Menge. Dann heißt eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Metrik**, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$;
2. $d(x, y) = 0$ dann und nur dann, wenn $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x, y, z \in X$.

Bemerkung 1.4.1 (X, d) nennt man einen **metrischen Raum**.

Bemerkung 1.4.2 In \mathbb{R}^n ist die Euklidische Distanz eine derartige Abbildung.

Lemma 1.5 Wenn $(X, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein normierter Vektorraum ist mit Norm $\|\cdot\|$, dann ist die Abbildung d , definiert durch $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik für X , d.h. (X, d) ist ein metrischer Raum.

Beweis. Weil $\|x\| \geq 0$ gilt für alle $x \in X$, folgt $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$.

Weil $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, folgt $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Weil $\|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$ folgt $d(x, y) = d(y, x)$.

Weil $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ folgt

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Die vier Eigenschaften einer Norm zeigen genau die Eigenschaften einer Metrik. ■

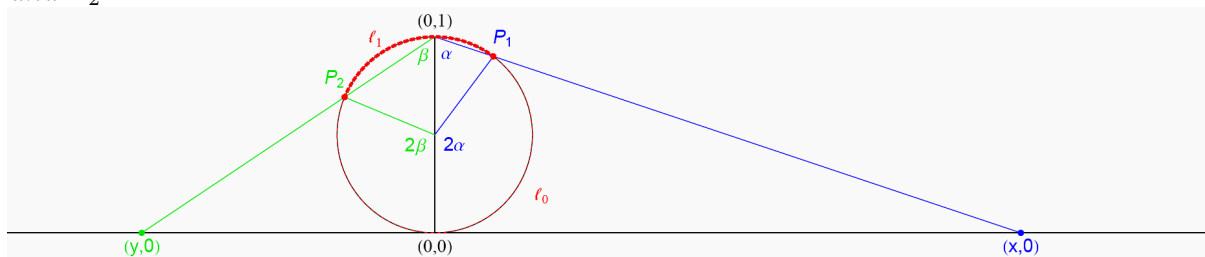
Beispiel 1.6 Man kann zeigen, dass

$$d(x, y) = \min(|\arctan(x) - \arctan(y)|, \pi - |\arctan(x) - \arctan(y)|)$$

auch eine Metrik auf \mathbb{R} ist. Betragsmäßig große x und y sind sich sehr nah. Zum Beispiel gilt

$$d(100, -200) = 0.01499\dots$$

Man kann sich eine Vorstellung dieser Metrik machen, indem man die Geraden $[(x, 0), (0, 1)]$ und $[(y, 0), (0, 1)]$ betrachtet. Wir nehmen den Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(0, \frac{1}{2})$ und betrachten die Schnittstellen P_1 und P_2 mit den eben genannten Geraden. Dann ist $d(x, y)$ die Länge der kürzesten Verbindung über den Kreis zwischen P_1 und P_2 .



Man setzt $\alpha = \arctan(x)$ und $\beta = \arctan(y)$ und findet für das Zweibein $(0, 0), (0, \frac{1}{2})$, P_1 den Winkel 2α und ähnlich für das Zweibein $(0, 0), (0, \frac{1}{2})$, P_2 den Winkel 2β . Die Winkel werden rechts herum gemessen (in diesem Bild ist β negativ). Weil der Kreis Radius $\frac{1}{2}$ hat, hat die Verbindung, die nicht durch $(0, 1)$ geht, die Länge $\ell_0 = \frac{1}{2}|2\alpha - 2\beta|$, und die Verbindung durch $(0, 1)$ hat die Länge $\ell_1 = \frac{1}{2}(2\pi - |2\alpha - 2\beta|)$. Man findet $d(x, y) = \min(\ell_0, \ell_1)$.

In einem metrischen Raum (X, d) kann man für jedes Element $x \in X$ Umgebungen $U_r(x)$ für $r \in \mathbb{R}^+$ definieren durch

$$U_r(x) = \{y \in X; d(x, y) < r\}.$$

Allgemein nennt man U eine Umgebung von x wenn es $U_r(x)$ mit $r > 0$ gibt derart, dass $U_r(x) \subset U$.

Lemma 1.7 Wenn (X, d) ein metrischer Raum ist, dann ist

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X); \forall a \in A \exists r \in \mathbb{R}^+ U_r(a) \subset A\} \quad (1.1)$$

eine Topologie für X , d.h. (X, \mathcal{T}) ist ein topologischer Raum.

Beweis. Die Bedingungen von Definition 1.3 soll man prüfen.

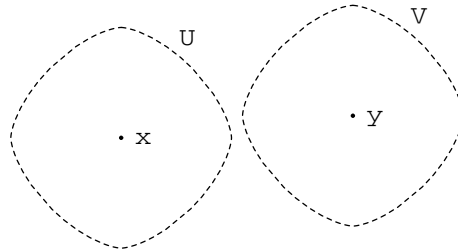
1. Man sieht direkt, dass $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{T}$ und schreibe $A = \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i$. Für $a \in A$ gilt, dass $a \in A_i$ für jedes i und dann gibt es $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{R}^+$ mit $d(x, a) < r_i \Rightarrow x \in A_i$. Wenn $d(x, a) < r := \min_{1 \leq i \leq k} r_i$ dann gilt $x \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i = A$. Man bemerke, dass $r > 0$ gilt, weil es nur endlich viele r_i gibt. Also folgt $A \in \mathcal{T}$.
3. Sei $\{A_i; i \in I\} \subset \mathcal{T}$ und sei $B = \bigcup_{i \in I} A_i$. Für $a \in B$ gibt es ein $i \in I$ mit $a \in A_i$. Für x mit $d(x, a) < r_i$ gilt $x \in A_i \subset B$. ■

Diese Ergebnisse in Kurzfassung:

Norm \blacktriangleright Metrik \blacktriangleright Topologie

Eine wichtige Eigenschaft wollen wir noch benennen. Sie sorgt zum Beispiel dafür, dass, wenn es einen Grenzwert gibt, dieser eindeutig ist.

Definition 1.8 Man sagt, dass (X, \mathcal{T}) die **Hausdorff-Eigenschaft** hat, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y hat mit $U \cap V = \emptyset$.



Proposition 1.9 Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.

Bemerkung 1.9.1 Anders gesagt: Wenn die Topologie \mathcal{T} auf X durch eine Metrik definiert ist wie in (1.1), dann hat (X, \mathcal{T}) die Hausdorff-Eigenschaft.

Beweis. Man setze $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$ und nehme $U = U_\varepsilon(x)$ und $V = U_\varepsilon(y)$. Wenn $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$, dann gilt

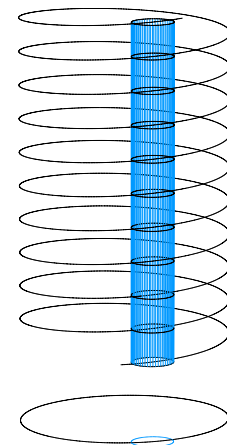
$$2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon,$$

ein Widerspruch. ■

Beispiel 1.10 Setzen wir $f : \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ mit $f(x) = e^{ix}$ und definieren die Topologie \mathcal{T} auf \mathbb{R} durch

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(A); A \subset \mathbb{C} \text{ ist offen}\}.$$

Dann hat $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nicht die Hausdorff-Eigenschaft. Diese Topologie lässt sich dann auch nicht durch eine Metrik beschreiben. Man kann sich hier \mathbb{R} vorstellen als aufgerollt in einer vertikalen Spirale und jedes $T \in \mathcal{T}$ als Teil der Spirale innerhalb einer Säule, die sich projizieren lässt auf eine offene Menge in \mathbb{C} . Anders gesagt, \mathcal{T} ist die Menge der 2π -periodischen offenen Mengen.



1.2 Basis und Produkt bei Topologien

In \mathbb{R}^n haben wir die Standardtopologie eingeführt mit Hilfe offener Kugeln. Man hat nicht nur die offenen Mengen damit definiert, sondern jede offene Menge U kann man auch schreiben als Vereinigung von Kugeln. Das kann man auch allgemeiner machen.

Definition 1.11 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Man nennt $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ eine **Basis** für die Topologie \mathcal{T} , wenn es für jedes $T \in \mathcal{T}$ Basiselemente $\{B_i \in \mathcal{B}; i \in I\}$ derart gibt, dass $T = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Die offenen Intervalle bilden eine Basis für die Standardtopologie auf \mathbb{R} ; die offenen Kugeln bilden eine Basis für \mathbb{R}^n .

Lemma 1.12 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $T \in \mathcal{T}$ mit $x \in T$ ein Element $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset T$, dann ist \mathcal{B} eine Basis für die Topologie \mathcal{T} ,

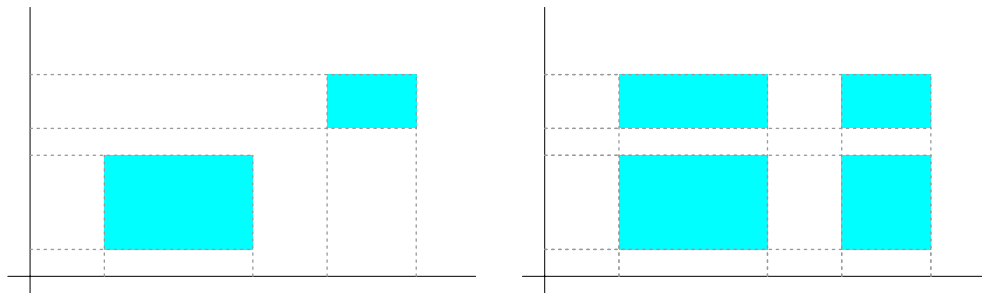
Beweis. Sei $T \in \mathcal{T}$. Für $x \in T$ gibt es $B_x \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_x \subset T$. Dann gilt $T = \bigcup_{x \in T} B_x$. ■

Definition 1.13 Seien (X_1, \mathcal{T}_1) und (X_2, \mathcal{T}_2) topologische Räume. Dann definiert man die **Produkttopologie** auf $X_1 \times X_2$ als die kleinste Topologie \mathcal{T} , die alle Mengen $T_1 \times T_2$ für $T_1 \in \mathcal{T}_1$ und $T_2 \in \mathcal{T}_2$ enthält. Man schreibt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Bemerkung 1.13.1 Die Produkttopologie \mathcal{T} enthält mehr als nur

$$T_1 \times T_2 = \{(x, y) ; x \in T_1 \text{ und } y \in T_2\}$$

mit $T_1 \in \mathcal{T}_1$ und $T_2 \in \mathcal{T}_2$. Man kann aber zeigen, dass $\{T_1 \times T_2 ; T_1 \in \mathcal{T}_1 \text{ und } T_2 \in \mathcal{T}_2\}$ eine Basis bildet für $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.



Links steht eine Darstellung von $(T_{1,a} \times T_{2,a}) \cup (T_{1,b} \times T_{2,b})$. Diese Menge ist nur selten ein Produkt. Rechts steht eine Darstellung vom kleinsten Produkt, das diese erste Menge enthält, nämlich $(T_{1,a} \cup T_{1,b}) \times (T_{2,a} \cup T_{2,b})$.

Bemerkung 1.13.2 Hat man eine Topologie \mathcal{T} auf $X_1 \times X_2$, dann kann man auch eine Topologie auf X_1 (und ebenso auch auf X_2) definieren, nämlich durch

$$\mathcal{T}_1 = \{T_1 \in \mathcal{P}(X_1) ; T_1 \times X_2 \in \mathcal{T}\}.$$

Lemma 1.14 Seien \mathcal{T}_n und \mathcal{T}_m die Standardtopologien auf \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m . Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^{n+m} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist die Produkttopologie von \mathcal{T}_n und \mathcal{T}_m .

Der Beweis dieses Lemmas verwendet Lemma 1.12 und dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ und $r > 0$ gilt

$$B_r^{(n+m)}(x, y) \subset B_r^{(n)}(x) \times B_r^{(m)}(y) \subset B_{\sqrt{2}r}^{(n+m)}(x, y).$$

1.3 σ -Algebra

Eine zweite Struktur für Teilmengen in $\mathcal{P}(X)$ ist folgende:

Definition 1.15 Eine Klasse \mathcal{A} von Teilmengen aus X , also $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, heißt eine σ -Algebra über X , falls

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,
3. $A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 1.15.1 Die Mengen in \mathcal{A} nennt man \mathcal{A} -messbar. (X, \mathcal{A}) nennt man einen messbaren Raum.

Bemerkung 1.15.2 Wenn $A_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen der zweiten Bedingung, dass auch $A_k^c \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil

$$\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c \in \mathcal{A}$$

gilt wiederum wegen dieser zweiten Bedingung, dass $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Eine σ -Algebra ist abgeschlossen unter allen abzählbaren Mengenoperationen (Vereinigung und Schnitt).

Wir erinnern nochmals an die Begriffe “endlich”¹ und “abzählbar”².

Beispiel 1.16 1. $\{\mathbb{R}, \emptyset\}$ ist die kleinste σ -Algebra über \mathbb{R} .

2. Sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R}\}$ eine σ -Algebra über \mathbb{R} .

3. Definiere für $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ die Menge

$$A_f := \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \text{ mit } f(k)=1} (k, k+1].$$

Dann ist $\mathcal{A} = \{A_f; f \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}\}$ eine σ -Algebra über \mathbb{R} .

4. $\mathcal{P}(X)$ ist die größte σ -Algebra über X .

Wenn man eine Teilmenge \mathcal{B} von $\mathcal{P}(X)$ hat, dann kann man wie folgt die kleinste σ -Algebra definieren, die \mathcal{B} enthält:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X); \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ und } \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra über } X \}. \quad (1.2)$$

Anders gesagt; sei \mathcal{M} die Menge aller σ -Algebren auf X und man setzt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \bigcap \{ \mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}.$$

¹Eine Menge A heißt endlich, wenn es $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

²Eine Menge A heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gibt derart, dass $A = f(\mathbb{N})$. Also $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ mit $x_i = f(i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

Wenn es sogar eine bijektive Abbildung f gibt, nennt man A abzählbar unendlich.

Man soll zeigen, dass so eine kleinste σ -Algebra existiert. Weil $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{M}$ ist \mathcal{M} nicht leer und ist $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ wohldefiniert. Außerdem gilt für $B \in \mathcal{B}$, dass $B \in \bigcap \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ eine σ -Algebra ist. 1) Weil $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ für jede σ -Algebra $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$, gilt $\emptyset, X \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. 2) Nehme $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. Dann gilt $A \in \mathcal{A}$ für jede $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ und $A \in \bigcap \{\mathcal{A} \in \mathcal{M}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}$. 3) Ähnlich kontrolliert man, dass die dritte Bedingung erfüllt ist.

Also ist $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ eine wohldefinierte σ -Algebra und aus der Art der Definition folgt, dass sie die kleinste ist.

Definition 1.17 Seien (X_1, \mathcal{A}_1) und (X_2, \mathcal{A}_2) messbare Räume. Dann definiert man die **Produkt- σ -Algebra** auf $X_1 \times X_2$ als die kleinste σ -Algebra \mathcal{A} , die alle Mengen $A_1 \times A_2$ für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ enthält. Man schreibt

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Bemerkung 1.17.1 Ähnlich wie bei der Produkttopologie enthält die Produkt- σ -Algebra \mathcal{A} mehr als nur

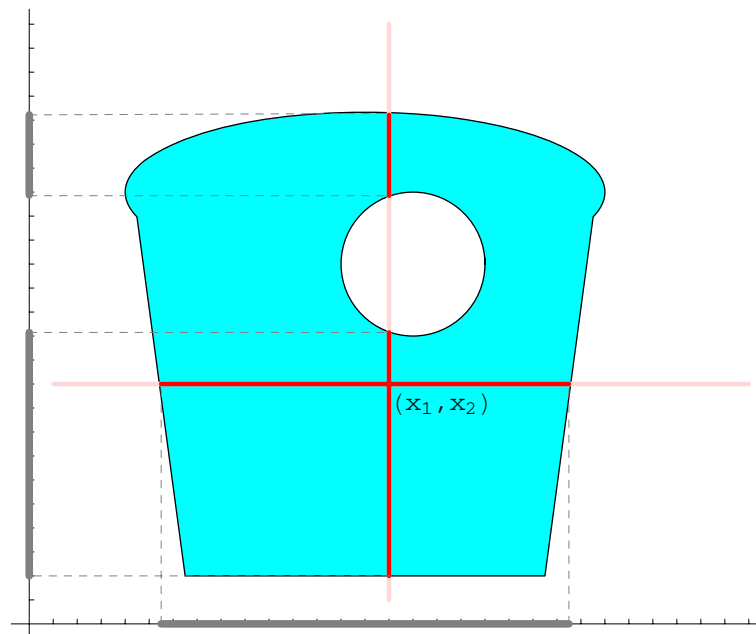
$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2); x_1 \in A_1 \text{ und } x_2 \in A_2\}$$

mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Satz 1.18 Wenn (X_1, \mathcal{A}_1) und (X_2, \mathcal{A}_2) messbare Räume sind, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, dann gilt

$$\begin{aligned} S_1(x_2, A) &:= \{x_1; (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_1, \\ S_2(x_1, A) &:= \{x_2; (x_1, x_2) \in A\} \in \mathcal{A}_2. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.18.1 $S_1(x_2, A)$ nennt man den Schnitt von A in X_1 bezüglich x_2 . Ähnlich nennt man $S_2(x_1, A)$ den Schnitt von A in X_2 bezüglich x_1 .



Beweis. Sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ die Menge aller Mengen $B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ derart, dass für alle $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ gilt:

$$S_1(x_2, B) \in \mathcal{A}_1 \text{ und } S_2(x_1, B) \in \mathcal{A}_2.$$

Nehmen wir an, dass \mathcal{B} eine σ -Algebra ist. Es gilt $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Weil für $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$S_1(x_2, A_1 \times A_2) = \begin{cases} A_1 & \text{falls } x_2 \in A_2 \\ \emptyset & \text{falls } x_2 \notin A_2 \end{cases}$$

und ähnliches für $S_2(x_1, A_1 \times A_2)$ gilt, findet man $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}$. Weil $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die kleinste σ -Algebra ist, die alle Mengen $A_1 \times A_2$ enthält, gilt $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{B}$.

Es bleibt noch zu beweisen, dass \mathcal{B} eine σ -Algebra ist.

1. $S_1(x_2, X_1 \times X_2) = X_1 \in \mathcal{A}_1$ und $S_2(x_1, X_1 \times X_2) = X_2 \in \mathcal{A}_2$ liefert $X_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$.
2. Weil $S_1(x_2, B^c) = S_1(x_2, B)^c$ und $S_2(x_1, B^c) = S_2(x_1, B)^c$ folgt $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^c \in \mathcal{B}$.
3. Ähnlich hat man

$$\bigcup_i S_1(x_2, B_i) = S_1\left(x_2, \bigcup_i B_i\right) \quad \text{und} \quad \bigcup_i S_2(x_1, B_i) = S_2\left(x_1, \bigcup_i B_i\right)$$

und damit zeigt man die dritte Bedingung. ■

1.4 Topologie und σ -Algebra

Vergleicht man also σ -Algebra mit Topologie, sieht einiges ähnlich aus, aber es gibt auch wesentliche Unterschiede: so sind bei einer σ -Algebra ‘mehr’ Schnitte und ‘weniger’ Vereinigungen erlaubt.

Die beiden Strukturen werden verknüpft in der folgenden Definition.

Definition 1.19 Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Topologie. Dann nennt man $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, d.h. die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{T} enthält, die zu (X, \mathcal{T}) gehörende **Borel- σ -Algebra**.



Der Französische Mathematiker und Politiker Émile Borel lebte von 1871 bis 1956.

Bemerkung 1.19.1 Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Die zugehörige Borel- σ -Algebra enthält u.a. alle offenen und abgeschlossenen Mengen. Die Mengen in diese Borel- σ -Algebra nennt man Borel-messbar.

Analysis 3, Woche 2



Maße I

Wir haben in Analysis 2 gesehen, dass man für beschränkte konvexe Teilmengen von \mathbb{R}^n einen Inhalt definieren kann. Auch für endliche Vereinigungen von solchen Teilmengen kann man den Inhalt definieren. Diese speziellen Gebiete bilden aber eine relativ kleine Klasse; man möchte dies verallgemeinern, eigentlich möchte man am liebsten einen Inhalt definieren für jedes $A \in \mathcal{P}(X)$. Es wird sich herausstellen, dass das zu viel verlangt ist.

Mehr als nur Vereinigungen von endlich vielen beschränkten konvexen Teilmengen ist aber möglich. Diesen verallgemeinerten Inhaltsbegriff nennt man Lebesgue-Maß. Bevor wir dieses Lebesgue-Maß betrachten, werden wir uns mit dem Begriff Maß beschäftigen. Vorher kommen noch die messbare Funktionen und zum Vergleich auch noch die stetige Funktionen.

2.1 Stetige Funktionen

Definition 2.1 Seien (X, \mathcal{S}) und (Y, \mathcal{T}) zwei topologische Räume. Dann nennt man eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ \mathcal{S} - \mathcal{T} -stetig, wenn für jedes $T \in \mathcal{T}$ gilt, dass $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$.

Lemma 2.2 Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und seien \mathcal{S} und \mathcal{T} die durch die Metriken d_X beziehungsweise d_Y definierte Topologien. Dann stimmt die klassische Definition der Stetigkeit mit der in Definition 2.1 überein.

Beweis. Wir erinnern uns der klassischen Definition einer stetigen Abbildung zwischen metrischen Räume: $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ heißt stetig, wenn

$$\forall a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

\implies Sei $T \in \mathcal{T}$ nicht leer und sei $a \in f^{-1}(T)$. Weil T offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(f(a)) := \{y \in Y; d_Y(f(a), y) < \varepsilon\} \subset T.$$

Aus der klassischen Definition der Stetigkeit folgt, dass es $\delta > 0$ gibt mit $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$ für

$$U_\delta(a) := \{y \in Y; d_X(a, y) < \delta\}.$$

Es folgt $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))) \subset f^{-1}(T)$. Weil dies für beliebige $a \in f^{-1}(T)$ gilt, bedeutet es $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$.

\Leftarrow Sei $a \in X$, $\varepsilon > 0$ und betrachte $U_\varepsilon(f(a))$. Weil $U_\varepsilon(f(a)) \in \mathcal{T}$ gilt, folgt aus der Annahme, dass $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))) \in \mathcal{S}$. Das heißt $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ ist offen, und weil $a \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$, hat es $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$. Anders gesagt, für jedes $a \in X$, $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass aus $d_X(a, x) < \delta$ folgt $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon$. ■

2.2 Messbare Funktionen

Definition 2.3 Seien (X, \mathcal{A}) und (Y, \mathcal{B}) zwei messbare Räume. Dann nennt man eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, wenn für jedes $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.4 Seien (X, \mathcal{T}) und (Y, \mathcal{S}) zwei topologische Räume und sei $f : X \rightarrow Y$ \mathcal{T} - \mathcal{S} -stetig. Dann ist f $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ -messbar.

Bevor wir diese Proposition beweisen, schauen wir uns das folgende Lemma an.

Lemma 2.5 Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ eine σ -Algebra auf X und $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$.

Beweis. 1) $\emptyset, Y \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ liefert $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ und $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$.

2) $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ liefert $A^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ und

$$f^{-1}(A^c) = \{x \in X; f(x) \in A^c\} = \{x \in X; f(x) \in A\}^c = (f^{-1}(A))^c.$$

3) Für $A_i \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i).$$

Also ist $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ eine σ -Algebra.

Weil $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ folgt $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ und weil $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}})$ eine σ -Algebra ist, hat man sofort

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})} \subset f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}). \quad (2.1)$$

Für die andere Richtung setzt man

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(Y); f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}\}.$$

Dieses \mathcal{B} ist derart definiert, dass

$$\mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})} = f^{-1}(\mathcal{B}), \quad (2.2)$$

und es folgt, dass $f^{-1}(\mathcal{B})$ eine σ -Algebra ist. Weil $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$, gilt außerdem $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.

Wir behaupten, dass schon \mathcal{B} eine σ -Algebra ist. Weil $f^{-1}(\emptyset), f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}$ folgt $\emptyset, Y \in \mathcal{B}$. Wenn $B \in \mathcal{B}$, dann folgt $B^c \in \mathcal{B}$ aus

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Wenn $B_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{B}$ aus

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}.$$

Also ist \mathcal{B} eine σ -Algebra. Weil $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ und weil $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ die kleinste σ -Algebra ist mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, folgt $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}$ und

$$f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})}. \quad (2.3)$$

Zusammen zeigen (2.1) und (2.3) das gewünschte Ergebnis. ■

Beweis von Proposition 2.4. Wir sollen zeigen, dass wenn $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{T}$ gilt, auch $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) \subset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ gilt. Mit Hilfe von Lemma 2.5 folgt $f^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{A}_{f^{-1}(\mathcal{S})} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$. ■

2.3 Definition eines Maßes

Definition 2.6 Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Dann heißt $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ ein (positives) **Maß**, wenn

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. μ ist **σ -additiv**: für jede paarweise disjunkte¹ Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Bemerkung 2.6.1 (X, \mathcal{A}, μ) nennt man einen **Maßraum**.

Bemerkung 2.6.2 Wenn außerdem $\mu(X) < \infty$, dann nennt man das Maß μ endlich. Wenn $\mu(X) = 1$, nennt man μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Bemerkung 2.6.3 Weil $\mu \geq 0$ ist, ist die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ auch unbedingt konvergent, wenn sie konvergiert. Unbedingt konvergent heisst, dass man die Folge umändern kann, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Bemerkung 2.6.4 Man nennt eine Mengenfunktion μ **additiv**, wenn für jede paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = \sum_{n=1}^k \mu(A_n).$$

σ -Additivität impliziert Additivität.

Diese Definition vom Maß liefert die folgenden Eigenschaften:

Satz 2.7 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann gilt für $A, B, A_i \in \mathcal{A}$:

1. $A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$;
2. $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. wenn $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\{\mu(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge² und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right);$$

4. wenn $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_0) < \infty$, dann ist $\{\mu(A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

¹Sei $A_i \in \mathcal{P}(X)$ für $i \in I$. Dann heißt $\{A_i\}_{i \in I}$ paarweise disjunkt, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

²Man erlaubt hier Grenzwerte in $[0, \infty]$. Für $\ell = \infty$ definiert man den uneigentlichen Limes wie folgt: Man sagt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, wenn

$$\forall R > 0 \exists N_R \in \mathbb{N} : n > N_R \implies a_n > R.$$

Bemerkung 2.7.1 Die vierte Aussage braucht eine Bedingung wie $\mu(A_0) < \infty$ (es reicht $\mu(A_{k_0}) < \infty$ für irgendein k_0). Denn es ist möglich, dass sowohl $\mu(A_k) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ als auch $\mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0$ gilt.

Ein solches Beispiel findet man in $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), Z)$ mit Z das Zählmaß. Dieses Zählmaß wird definiert durch

$$Z(A) = \begin{cases} n & \text{falls } A \text{ genau } n \text{ Elemente enthält,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich viele Elemente enthält.} \end{cases}$$

Betrachtet man $A_k = 2^k \mathbb{Z} = \{n2^k; n \in \mathbb{Z}\}$, so findet man $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$Z(A_k) = \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und } Z\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = Z(\{0\}) = 1.$$

Beweis. 1) Weil $B = A \cup (B \cap A^c)$ und $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ gilt, folgt aus der Additivität, dass

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

2) Man bemerke, dass $A \cup B = (A \cap B^c) \cup B$ und $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$. Dann gilt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B).$$

Weil $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$ gilt, hat man auch

$$\mu(A \cap B^c) + \mu(A \cap B) = \mu(A).$$

Es folgt, dass

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \cap B^c) + \mu(B) + \mu(A).$$

Wenn $\mu(A \cap B^c) = \infty$, dann gilt auch $\mu(A \cup B) = \infty = \mu(A)$, und es steht auf beiden Seiten ∞ . Wenn $\mu(A \cap B^c) < \infty$, dann bekommt man

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(B) + \mu(A).$$

3) Weil 1) gilt, findet man, dass die Folge wachsend ist. Setzt man $\tilde{A}_0 = A_0$ und $\tilde{A}_k = A_k \cap A_{k-1}^c$ für $k \geq 1$, dann ist $\{\tilde{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{A}_k\right) \stackrel{(*)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(\tilde{A}_k) \stackrel{(\diamond)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

In $=^{(*)}$ verwendet man die σ -Additivität und in $=^{(\diamond)}$ die daraus folgende Additivität.

4) Man findet, weil 1) gilt, dass die Folge fallend ist. Dann folgt $\mu(A_k) \leq \mu(A_0) < \infty$ und $\{\mu(A_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist eine fallende nach unten (durch 0) beschränkte Folge und deshalb konvergent. Weil

$$\mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu(A_k) = \mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu(A_0 \cap A_k) = \mu(A_0)$$

gilt und $\mu(A_k)$ endlich ist, folgt

$$\mu(A_0 \cap A_k^c) = \mu(A_0) - \mu(A_k). \quad (2.4)$$

Jetzt definiert man $B_k = A_0 \cap A_k^c$ und wendet 3) an. Es gilt $A_k^c \subset A_{k+1}^c$ und also auch

$$B_k = (A_0 \cap A_k^c) \subset (A_0 \cap A_{k+1}^c) = B_{k+1}.$$

Weil

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = A_0 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c = A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)^c$$

gilt, bekommt man

$$\begin{aligned} \mu(A_0) &= \mu\left(A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)^c\right) + \mu\left(A_0 \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)\right) = \\ &= \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(man verwende 3.)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_0 \cap A_k^c) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(man verwende (2.4))} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu(A_0) - \mu(A_k)) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \\ &\quad \text{(der Limes existiert in } [0, \infty)) \\ &= \mu(A_0) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) + \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right). \end{aligned}$$

Weil $\mu(A_0) < \infty$ folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k\right).$$

■

Beispiel 2.8 Sei $a \in \mathbb{R}$ und definiere den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_a)$ durch

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{falls } a \notin A. \end{cases}$$

Dieses Maß nennt man das Dirac-Maß mit Träger in a .

Beispiel 2.9 In Analysis 2 haben wir gezeigt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Man findet, dass für $g_{\alpha,y}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\alpha^2}}$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha,y}(x) dx = 1$. Für die offenen Intervalle (a, b) definiert man

$$\mu_{\alpha,y}((a, b)) = \int_a^b g_{\alpha,y}(x) dx.$$

Also gilt für jedes $\alpha > 0$ und $y \in \mathbb{R}$, dass $\mu_{\alpha,y}(\mathbb{R}) = 1$. Außerdem gilt

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \mu_{\alpha,y}((a, b)) = \delta_y((a, b)).$$

Wir werden noch zeigen, dass man $\mu_{\alpha,y}$ erweitern kann zu einem Maß auf allen Borelmengen von \mathbb{R} .

Die Standard-Gaußkurve $g_{1,0}$ oder Normalverteilung bekommt man als Limes beim Dreieck von Pascal. Das heißt, wenn man eine ehrliche Münze n mal wirft, dann ist die Wahrscheinlichkeit m mal Kopf zu erhalten $\left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{m}$. Zentriert man den Graph in 0 (schiebe das Intervall $[0, n]$ durch $m \mapsto m - \frac{1}{2}n$ auf $[-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n]$) und skaliert man mit

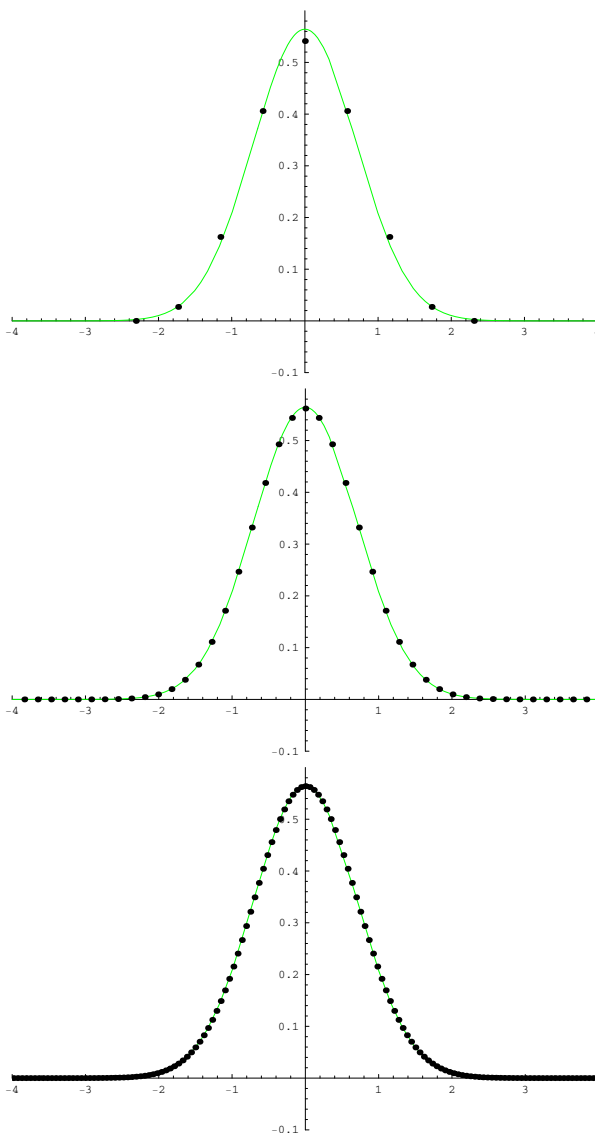
Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}n}$ (genauer gesagt $(x, y) \mapsto (\sqrt{2/n} x, \sqrt{n/2} y)$), dann approximiert man mit den folgenden Paaren die Gaußkurve:

$$\left(\sqrt{\frac{2}{n}} \left(m - \frac{1}{2}n \right), \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^n \binom{n}{m} \right) \rightsquigarrow \left(x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right) \quad (2.5)$$

Das heißt: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ derartig, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n}} (m_n - \frac{1}{2}n) = x$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^n \binom{n}{m_n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Wir beweisen dies nicht, aber versuchen mit einigen Bildern das Ergebnis zu illustrieren.



Die Bilder zu (2.5) für $n = 6$, $n = 60$ und $n = 600$.

Ein Bild zu dieser Funktion findet man auch mitten auf der letzten 10-DM-Banknote zusammen mit Carl Friedrich Gauß.



2.4 Nullmengen und Vollständigkeit

Definition 2.10 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Man nennt $A \in \mathcal{A}$ eine **Nullmenge**, wenn $\mu(A) = 0$. Ein Maßraum heißt **vollständig**, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge wiederum eine Nullmenge ist.

Lemma 2.11 Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wiederum Nullmengen.

Beweis. Dieses Ergebnis folgt aus der σ -Additivität. ■

Satz 2.12 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Setzt man

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup A_0; A \in \mathcal{A} \text{ und es gibt eine Nullmenge } N \in \mathcal{A} \text{ mit } A_0 \subset N\}$$

und $\bar{\mu}(A \cup A_0) = \mu(A)$, dann gilt

1. $\bar{\mathcal{A}}$ ist ein σ -Algebra,
2. $\bar{\mu}$ ist ein wohldefiniertes Maß, und
3. $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ ist ein vollständiger Maßraum.

Beweis. 1) Weil \emptyset eine Nullmenge ist und $A \cup \emptyset = A$ gilt, gilt $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$. So ist gleich die erste Bedingung einer σ -Algebra erfüllt. Sei $A \in \mathcal{A}$ und $A_0 \subset N$ mit N eine Nullmenge. Weil auch $N \cap A_0^c \subset N$ und

$$A_0^c = (N^c \cap A_0^c) \cup (N \cap A_0^c) = N^c \cup (N \cap A_0^c)$$

gilt es, dass

$$\begin{aligned} (A \cup A_0)^c &= A^c \cap A_0^c = A^c \cap (N^c \cup (N \cap A_0^c)) = \\ &= (A^c \cap N^c) \cup (A^c \cap N \cap A_0^c). \end{aligned}$$

Man hat $A^c \cap N^c \in \mathcal{A}$ und $A^c \cap N \cap A_0^c \subset N$. So hat man bewiesen, dass $(A \cup A_0)^c \in \bar{\mathcal{A}}$. Die letzte Eigenschaft einer σ -Algebra folgt aus Lemma 2.11.

2) Wenn $A \cup A_0 = B \cup B_0$ mit $A, B \in \mathcal{A}$ und A_0 und B_0 Teilmengen von Nullmengen N beziehungsweise M sind, dann gilt $A \cup N \cup M = B \cup N \cup M$. Weil $A^c \cap (N \cup M)$ und $B^c \cap (N \cup M)$ Nullmengen sind, hat man

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu(A) + \mu(A^c \cap (N \cup M)) = \mu(A \cup N \cup M) = \\ &= \mu(B \cup N \cup M) = \mu(B) + \mu(B^c \cap (N \cup M)) = \mu(B) \end{aligned}$$

und es gilt $\bar{\mu}(A \cup A_0) = \bar{\mu}(B \cup B_0)$. So ist $\bar{\mu}$ wohldefiniert. Es ist sogar ein Maß:

i) \emptyset ist eine Nullmenge und $\bar{\mu}(\emptyset) = \bar{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

ii) Für eine disjunkte Folge $\{A_i \cup A_{0,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $A_{0,i}$ Teilmenge einer Nullmenge, hat man:

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cup A_{0,i})\right) &= \bar{\mu}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{0,i}\right) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mu}(A_i \cup A_{0,i}).\end{aligned}$$

3) Diese letzte Eigenschaft folgt aus der Definition und den ersten beiden Eigenschaften. ■

Analysis 3, Woche 3

Maße II



3.1 Äußeres Maß

Man könnte hoffen, nachdem man durch die Erweiterung von (X, \mathcal{A}, μ) zu $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ einen vollständigen Maßraum konstruiert hat, dass auch alle Mengen messbar sein sollten. Diese Hoffnung ist vergeblich; es gibt immer noch nicht-messbare Mengen. Möchte man aber ein konkretes Beispiel für eine nicht-messbare Menge hinschreiben, dann braucht man das Auswahlaxiom¹.

Eine Möglichkeit um für alle Teilmengen in $\mathcal{P}(X)$ etwas ähnliches wie ein Maß zu definieren ist folgende:

Definition 3.1 Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ nennt man ein äußeres Maß auf X , wenn

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2. für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$: $A \subset B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, und
3. μ^* ist σ -**subadditiv**: für alle $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ gilt:

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i).$$

Bemerkung 3.1.1 Bei der σ -Subadditivität wird nicht verlangt, wie bei der σ -Additivität, dass die A_i paarweise disjunkt sind. Das ist jedoch nicht der Grund wieso \leq statt $=$ in der Definition erscheint. Man möchte hier zulassen, dass eine strikte Ungleichung erscheinen kann, sogar bei paarweise disjunkte Mengen A_i .

Wenn man genügend Teilmengen von X hat für die man eine ‘Grösse’ definiert, dann lässt sich daraus ein äußeres Maß konstruieren. Genau beschrieben wird dieses Resultat im nächsten Lemma.

¹**Auswahlaxiom** Wenn \mathcal{A} eine Menge nichtleerer Mengen ist, dann gibt es eine Auswahlfunktion: für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$ kann man ein Element $a \in A$ bestimmen.

Anders gesagt:

$$\exists f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \text{ mit } \forall A \in \mathcal{A} \text{ gilt } f(A) \in A.$$

Die meisten Mathematiker nehmen dieses Axiom als Voraussetzung. In der Mathematik ist ein Axiom ein nicht deduktiv ableitbarer und widerspruchsfreier Grundsatz.

Lemma 3.2 Seien $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ derart, dass:

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$ und $\nu(\emptyset) = 0$,
2. X kann mit abzählbar vielen $B_i \in \mathcal{B}$ überdeckt werden:

$$\exists \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B} \text{ derart, dass } \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = X.$$

Dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, definiert durch

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i); B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\},$$

ein äußeres Maß auf X .

Beweis. Aus dieser Definition folgt gleich, dass die erste Bedingung von Definition 3.1 erfüllt ist. Denn falls $A_1 \subset A_2$ gilt, nimmt man für A_2 das Infimum über eine kleinere Klasse von B_i .

Um die σ -Subadditivität zu zeigen, sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kann man $\{B_{n,i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ finden derart, dass $A_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{n,i}$ und

$$\mu^*(A_n) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_{n,i}) - 2^{-n+1}\varepsilon.$$

Es folgt, dass $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{n,i}$ und

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_{n,i}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + 2^{-n+1}\varepsilon) = \varepsilon + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Weil diese Ungleichung gilt für alle $\varepsilon > 0$, gilt auch

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

So ist μ^* ein äußeres Maß. ■

3.1.1 Das äußere Lebesgue-Maß

Wie wir in Lemma 3.2 gesehen haben kann man ein äußeres Maß definieren, wenn man eine Art Prämaß definiert auf genügend viele Mengen. Nehmen wir \mathbb{R}^n und die Blöcke, die wir auch schon bei der Riemann-Integrierbarkeit verwendet haben, folgt das äußere Lebesgue-Maß. Für $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ mit $a_i \leq b_i$ setzen wir

$$\text{Volumen}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Wir nennen $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ einen Block in \mathbb{R}^n .

Definition 3.3 Sei \mathcal{B} die Menge aller Blöcke in \mathbb{R}^n . Wir definieren das äußere Maß $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Volumen}(R_i); R_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i \right\};$$

λ_n^* heißt das n -dimensionale äußere Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n .



Henri Léon Lebesgue
1875 - 1941

Bemerkung 3.3.1 Wegen Lemma 3.2 kann man folgern, dass λ_n^* tatsächlich ein äußeres Maß ist.

Bemerkung 3.3.2 Man kann zeigen, dass das äußere Lebesgue-Maß invariant ist unter Verschiebungen und Drehungen.

3.1.2 Äußere Hausdorff-Maße

Statt mit rechteckigen Blöcken eine Teilmenge von \mathbb{R}^n zu überdecken, könnte man auch Kugeln verwenden. Man kann zeigen, dass

$$\lambda_n^*(A) = \sigma_n \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^n; B_{r_i}(x_i) \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{r_i}(x_i) \right\}$$

mit $\sigma_n = \text{Volumen}(B_1(0))$ das gleiche äußere Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n liefert. Wenn man statt des Volumens die Länge haben möchte, sollte statt $\sigma_n \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^n$ etwas wie $2 \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i$ erscheinen. Für eine s -dimensionale Menge in \mathbb{R}^n wäre es $c_s \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^s$. Dies passt aber nur, wenn man beliebig kleine Kugel zuläßt und die größeren verbietet. Diese Überlegung führt zu

$$\lambda_{s\text{-dim. in } \mathbb{R}^n}^*(A) = c_s \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^s; B_{r_i}(x_i) \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{r_i}(x_i) \text{ mit } r_i < \varepsilon \right\}.$$

Auf diese Art könnte man sogar Maße für nicht-ganzzahlige Dimensionen definieren:

Definition 3.4 Sei $s > 0$, $\varepsilon > 0$ und \mathcal{B}_ε die Menge aller Kugeln in \mathbb{R}^n (inklusive die leere) mit $r \in [0, \varepsilon]$:

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}.$$

Wir definieren $h_s^\varepsilon : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$h_s^\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{Radius}(B_i))^s; B_i \in \mathcal{B}_\varepsilon \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\} \quad (3.1)$$

und

$$h_s^*(A) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A). \quad (3.2)$$

h_s^* heißt das s -dimensionale äußere Hausdorff²-Maß auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung 3.4.1 Eigentlich ist dies nicht das s -dimensionale äußere Hausdorff-Maß, sondern eine sphärische Version davon. Das übliche äußere Hausdorff-Maß verwendet mehr als nur Kugeln und für einige pathologische Mengen bringt dies einen Unterschied. Man kann jedoch zeigen, dass beide Definitionen äquivalente Maße geben.

Bemerkung 3.4.2 Aus der Definition folgt sofort, dass

$$0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \implies h_s^{\varepsilon_2}(A) \geq h_s^{\varepsilon_1}(A).$$

Weil $h_s^\varepsilon(A) \geq 0$ folgt, dass $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A)$ existiert als Grenzwert in $[0, \infty]$. Dann gilt auch $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} h_s^\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} h_s^\varepsilon(A)$.

²Felix Hausdorff, Breslau 1868 – Bonn 1942

Bemerkung 3.4.3 In (3.1) ist tatsächlich ein äußeres Maß definiert, denn die Klasse \mathcal{B}_ε und die Größen ν_s mit $\nu_s(B_r(x)) = r^s$ erfüllen die Bedingungen in Lemma 3.2. Also ist h_s^ε ein äußeres Maß für $\varepsilon > 0$ und $s \in (0, n]$.

Für $s = 0$ definiert man in (3.1) h_0^ε durch $\nu_0(\emptyset) = 0$ und $\nu_0(B_r(x)) = 1$ falls $r > 0$. Auch h_0^ε ist ein äußeres Maß; h_0^* ist das Zählmaß.

Für alle $s \in [0, n]$ sollte man sich überlegen, warum h_s^* tatsächlich ein äußeres Maß ist.

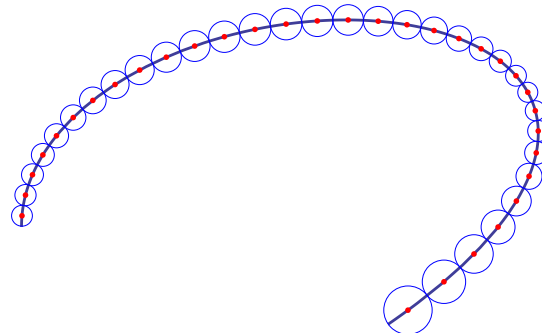
Bemerkung 3.4.4 Für die Bilder glatter injektiver

Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ oder \mathbb{R}^3 gilt

$$2h_1^*(\gamma[0, 1]) = \ell(\gamma),$$

wo $\ell(\gamma)$ die Bogenlänge von γ darstellt.

Man überdeckt das Bild der Kurve mit Kreisscheiben und zweimal die Summe der Radien approximiert die Länge der Kurve.



Bemerkung 3.4.5 Wenn man für ganzzahlige s und schöne Mengen die Standardinhalte wiederfinden möchte, dann muss man in (3.1) einen Faktor σ_s anbringen; σ_s ist das s -dimensionale Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^s . Oft wird das Hausdorff-Maß inklusive dieses Faktors definiert. Übrigens kann man statt Kugeln auch Würfel verwenden. Den Faktor muss man wiederum anpassen.

Beispiel 3.5 Sierpinski's Teppich. Wir nehmen eine Teilmenge S von $[0, 1]^2$ wie folgt. Man teile das Gebiet in 3×3 Teilquadrate und entfernt das Mittlere. Man wiederholt dies auf die restlichen 8 Quadrate und setzt das fort:

$$S = [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \bigcup_{\ell=0}^{3^n-1} \left[\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right] \times \left[\frac{3\ell+1}{3^{n+1}}, \frac{3\ell+2}{3^{n+1}} \right].$$

Es gilt $\lambda^*(S) = 0$, denn in jedem Schritt der Konstruktion entfernt man $\frac{1}{9}$ des Gebietes und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$.

Weil man S überdecken kann mit 8^n Kugeln, die Radius $\sqrt{2} \cdot 3^{-n}$ haben, finden wir

$$h_s^{\sqrt{2}} \cdot 3^{-n} (S) \leq 8^n \left(2\sqrt{2} \cdot 3^{-n}\right)^s = 2^{3/2} \cdot s \cdot (8 \cdot 3^{-s})^n.$$

Weil $8 \cdot 3^{-s} < 1$ für $s > s_d = \frac{\log(8)}{\log(3)} = 1.8928\dots$ gilt es, dass

$$h_s^*(S) = 0 \text{ falls } s > s_d. \quad (3.3)$$

Für $\varepsilon < 1$ folgt $s_1 \leq s_2 \implies h_{s_1}^\varepsilon(S) \geq h_{s_2}^\varepsilon(S)$, also auch

$$s_1 \leq s_2 \implies h_{s_1}^*(S) \geq h_{s_2}^*(S).$$

Nehmen wir an $h_s^\varepsilon(S) = C_s \in (0, \infty]$ für $s < s_d$, dann folgt aus die Selbstähnlichkeit von S (S besteht aus 8 kleineren Kopien von sich selber), dass $h_s^{\varepsilon/3}(S) = 8 \left(\frac{1}{3}\right)^s h_s^\varepsilon(S)$. Durch Wiederholung folgt $h_s^{\varepsilon/3^n}(S) = (8 \cdot 3^{-s})^n C_s$ und wir finden, dass

$$h_s^*(S) = \infty \text{ falls } s < s_d. \quad (3.4)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $h_s^\varepsilon(S) > 0$.

Definition 3.6 Wenn es für $S \subset \mathbb{R}^n$ eine Zahl $s_d \in [0, n]$ gibt derart, dass (3.3) und (3.4) erfüllt sind, sagt man: S hat **Hausdorff-Dimension** s_d .

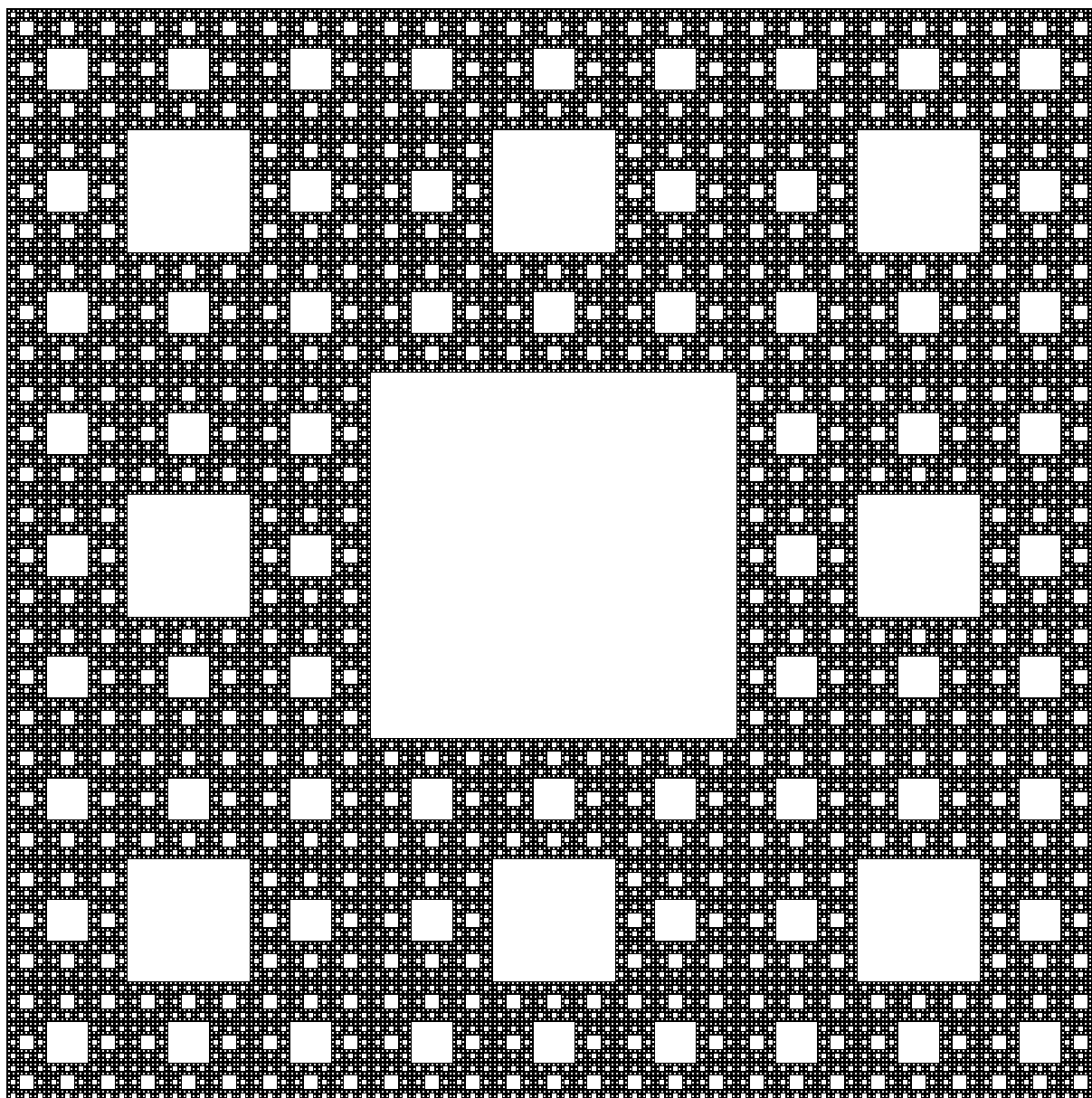


Abbildung 3.1: Sierpinski's Teppich S ; $\{x; (x, \frac{1}{2}) \in S\}$.

3.2 Vom äußeren Maß zum Maß

Definition 3.7 Sei μ^* ein äußeres Maß auf X . Man nennt $A \in \mathcal{P}(X)$ μ^* -messbar, wenn für jedes $B \in \mathcal{P}(X)$ gilt:

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \leq \mu^*(B). \quad (3.5)$$

Die Menge aller μ^* -messbaren Mengen wird mit $\mathcal{A}(\mu^*)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.7.1 Hier wird μ^* -messbar definiert ohne etwas über eine σ -Algebra zu sagen. Wenn Sie sich wundern, wieso das geht, haben Sie völlig recht. Im nächsten Theorem wird dieses Problem aus der Welt geschafft, denn da wird $\mathcal{A}(\mu^*)$ als das passende σ -Algebra identifiziert und ist μ^* ein dazu passendes Maß.

Bemerkung 3.7.2 Weil die σ -Subadditivität impliziert, dass für $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu^*(B) = \mu^*((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B)$$

gilt, kann man die Ungleichung in (3.5) ersetzen durch ein Gleichheitszeichen.

Satz 3.8 (Caratheodory³) Sei μ^* ein äußeres Maß auf X . Dann ist $(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)})$ ein vollständiger Maßraum.

Bemerkung 3.8.1 Insbesondere gilt, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ -Algebra ist und dass $\mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$ ein Maß ist auf diese σ -Algebra.

Definition 3.9 Wenn μ^* ein äußeres Maß auf X ist und $(X, \mathcal{A}(\mu^*), \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)})$ der zugehörige vollständige Maßraum, dann nennt man $\mu = \mu^*_{|\mathcal{A}(\mu^*)}$ das von μ^* **induzierte Maß**.

Beweis von Satz 3.8. Wir zeigen erst, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ -Algebra ist.

Aus

$$\mu^*(X \cap B) + \mu^*(X^c \cap B) = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(B)$$

folgt $X \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Aus der Symmetrie der Bedingung folgt $A \in \mathcal{A}(\mu^*) \implies A^c \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Sei $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mu^*)$; es soll gezeigt werden, dass (3.5) auch gilt für $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Wir fangen an mit zwei Teilmengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und dürfen annehmen, dass $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und dass $\mu^*(B) < \infty$. Verwendet man σ -Additivität, dass $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und zweimal (3.5), dann folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(B) &\leq \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B) \leq \\ &\leq \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap B) + \mu^*((A_1 \cup A_2)^c \cap B) = \\ &= \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap A_1^c \cap B) + \mu^*(A_2^c \cap A_1^c \cap B) \leq \\ &\leq \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_1^c \cap B) \leq \mu^*(B). \end{aligned}$$

Also gilt $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap B) = \mu^*(A_1 \cap B) + \mu^*(A_2 \cap B).$$

Mit vollständiger Induktion folgt für paarweise disjunkte $\{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{A}(\mu^*)$, dass $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A_i \cap B). \quad (3.6)$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass (3.5) auch für eine abzählbare Vereinigung gilt. Sei $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\mu^*)$ eine disjunkte Folge und setze $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Es gibt zwei Möglichkeiten. Wenn $\mu^*(B) = \infty$, hat man nichts zu beweisen. Wenn $\mu^*(B) < \infty$, dann gilt auch $\mu^*(A \cap B) < \infty$ und es folgt aus der Subadditivität und (3.6) und die zweite Eigenschaft eines äußeren Maßes, dass

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap B) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu^*(A_i \cap B) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cap B). \end{aligned} \quad (3.7)$$

³Constantin Caratheodory war ein Griechischer Mathematiker. Er wurde geboren 1873 in Berlin und starb 1950 in München.

Es folgt $\mu^*(A \cap B) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$ und ebenso gilt

$$\mu^*(A \cap B) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B).$$

Weil $A^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \subset \bigcap_{i=1}^n A_i^c$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A \cap B) &\leq \mu^*\left(\bigcap_{i=0}^n A_i^c \cap B\right) + \mu^*(A \cap B) = \\ &= \mu^*\left(\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right)^c \cap B\right) + \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^n A_i \cap B\right) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = \\ &\leq \mu^*(B) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

In (3.7) findet man, dass $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$ konvergiert falls $\mu^*(B) < \infty$, anders gesagt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B) = 0.$$

Dann folgt aus (3.8), dass $\mu^*(A^c \cap B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(B)$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathcal{A}(\mu^*)$ eine σ -Algebra ist.

In (3.7) findet man, dass $\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap B\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i \cap B)$ für $A_i \in \mathcal{A}(\mu^*)$. Setze $B = A$ und es folgt, wenn $\mu^*(A) < \infty$, dass

$$\mu^*\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(A_i). \quad (3.9)$$

Für $\mu^*(A) = \infty$ folgt (3.9) aus der Subadditivität. Also ist μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}(\mu^*)$.

Schlussendlich zeigen wir noch die Vollständigkeit. Wenn $\mu^*(A) = 0$, dann gilt für $\tilde{A} \subset A$, dass $\mu^*(\tilde{A}) = 0$ und für $B \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\mu^*(\tilde{A}^c \cap B) + \mu^*(\tilde{A} \cap B) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A) = \mu^*(B).$$

Das heißt $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\mu^*)$ und $\mathcal{A}(\mu^*)$ ist vollständig. ■

Analysis 3, Woche 4

Lebesgue-Maß



Henri Léon Lebesgue:

Réduites à des théories générales, les mathématiques seraient une belle forme sans contenu.

Oder auf Deutsch: Reduziert auf allgemeine Theorien wäre die Mathematik eine schöne Form ohne Inhalt.

4.1 Lebesgue-Maß und Borel-Mengen

Für \mathbb{R}^n haben wir mit Hilfe des Volumens $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty)$, und dabei ist \mathcal{B} die Menge aller Blöcke, das äußere Maß $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i); B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\}.$$

Lemma 3.2 besagt, dass λ^* tatsächlich ein äußeres Maß ist, welches wir das **äußere Lebesgue-Maß** nennen. In Definition 3.7 wird $\mathcal{A}(\lambda^*)$ festgelegt und in Satz 3.8 wird beschrieben, dass $\mathcal{A}(\lambda^*)$ eine σ -Algebra ist und dass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}(\lambda^*), \lambda^*_{|\mathcal{A}(\lambda^*)})$ ein **vollständiger Maßraum** ist.

Definition 4.1 Sei $X = \mathbb{R}^n$. Das vom äußeren Lebesgue-Maß induzierte Maß nennt man das **Lebesgue-Maß**. Man schreibt $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$.

Man hat sich einige Mühe gegeben, eine Größe, die auf Blöcke definiert ist, zu einem Maß auf einer σ -Algebra zu erweitern. Die natürliche Frage, die aufkommt, ist: wie groß ist diese σ -Algebra, oder präziser gefragt: Welche Mengen sind denn nun Lebesgue-messbar?

Satz 4.2 Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Klasse der üblichen offenen Mengen in \mathbb{R}^n , d.h. für alle $T \in \mathcal{T}$ und $x \in T$ gibt es $r > 0$ derart, dass $\{y \in \mathbb{R}^n; \|y - x\| < r\} \subset T$. Sei $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ wie oben. Es gilt:

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{L}.$$

Bemerkung 4.2.1 Weil $\mathcal{L} = \mathcal{A}(\lambda^*)$ ein σ -Algebra ist, folgt aus $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L}$. Man kann $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}$ auch formulieren als "offene Mengen sind Lebesgue-messbar". Die Aussage $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L}$ lässt sich beschreiben als "die Mengen in der Borel- σ -Algebra sind Lebesgue-messbar". Die Mengen in der Borel- σ -Algebra nennt man Borel-Mengen.

Bemerkung 4.2.2 Man kann zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \neq \mathcal{L}$. Das heißt, es gibt Lebesgue-messbare Mengen die keine Borel-Mengen sind.

Andererseits hat man auch, dass $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}} = \mathcal{L}$. Genauer gesagt, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \lambda)$ ist die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{\mathcal{T}}, \lambda|_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}}})$.

Bevor wir Satz 4.2 beweisen, werden wir uns erst ein Lemma anschauen und brauchen dazu die Distanz zweier Mengen in \mathbb{R}^n .

Definition 4.3 Die **Distanz** $d : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ definiert man wie folgt:

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf \{ \|x - y\| ; x \in \Omega_1, y \in \Omega_2 \}.$$

Außerdem definiert man $d : \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty)$ durch $d(x, \Omega_2) = d(\{x\}, \Omega_2)$.

Lemma 4.4 Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $d(A_1, A_2) > 0$, dann gilt

$$\lambda^*(A_1 \cup A_2) = \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2).$$

Hier ist λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung 4.4.1 Mit Induktion zeigt man $\lambda^*(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(A_i)$, wenn $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ derart ist, dass $d(A_i, A_j) > 0$ für $i \neq j$.

Beweis. Sei $d(A_1, A_2) = c > 0$. Das äußere Lebesgue-Maß ist definiert als ein Infimum bei Überdeckungen mit Blöcken:

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i); B_i \in \mathcal{B} \text{ und } A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\mathcal{U} = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung durch Blöcke von $A_1 \cup A_2$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(B_i) < \lambda^*(A_1 \cup A_2) + \varepsilon$. Wenn man die Blöcke gegebenenfalls in kleinere Blöcke aufteilt, kann man annehmen, dass jeder Block B_i einen Durchmesser kleiner als c hat. Dann gilt entweder $A_1 \cap B_i = \emptyset$ oder $A_2 \cap B_i = \emptyset$. Das heißt $\mathcal{U}_1 = \{B_i; A_2 \cap B_i = \emptyset\}$ eine Überdeckung von A_1 und $\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1$ eine von A_2 . Es folgt

$$\lambda^*(A_1) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U}_1} \nu(B_i) \text{ und } \lambda^*(A_2) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1} \nu(B_i)$$

and dann auch, dass

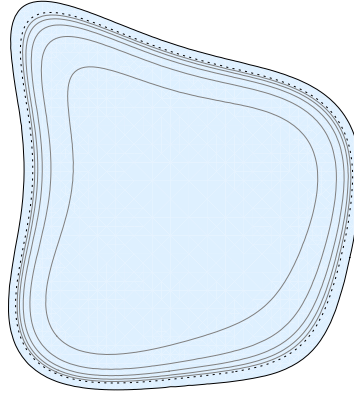
$$\lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) \leq \sum_{B_i \in \mathcal{U}_1} \nu(B_i) + \sum_{B_i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1} \nu(B_i) < \lambda^*(A_1 \cup A_2) + \varepsilon.$$

Weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2) \leq \lambda^*(A_1 \cup A_2)$. Die Subadditivität bringt $\lambda^*(A_1 \cup A_2) \leq \lambda^*(A_1) + \lambda^*(A_2)$. ■

Beweis von Satz 4.2. Man soll zeigen, dass für jede offene Menge A die Bedingung in Definition 3.7 erfüllt ist, d.h.

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) \leq \lambda^*(B) \text{ für alle } B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Hier ist λ^* das äußere Lebesgue-Maß. Wir dürfen annehmen, dass $\lambda^*(B) < \infty$.

Abbildung 4.1: Ein Bild zu $A_n \subset A_{n+1} \subset A_{n+2} \subset \dots \subset A$.

Sei nun A eine offene Menge. Wir werden A ein wenig verkleinern, indem wir eine Schicht am Rande entfernen:

$$A_n = \left\{ x \in A; d(x, A^c) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Weil A offen ist, findet man $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)$. Wir setzen außerdem $S_n = A_{n+1} \setminus A_n$ und bemerken, dass

$$d(S_n, S_{n+2}) \geq \frac{1}{(n+1)n} > 0.$$

Denn $x \in S_{n+2} \subset A_{n+1}^c$ bedeutet, dass es $b \in A^c$ gibt mit $\|x - b\| \leq \frac{1}{n+1}$ und $y \in S_n \subset A_n$, dass $\|y - b\| \geq \frac{1}{n}$. Es folgt

$$\|x - y\| \geq \|y - b\| - \|x - b\| \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)n}.$$

Wegen Bemerkung 4.4.1 gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda^*(S_{2i} \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_{2i} \cap B\right) \leq \lambda^*(B) < \infty$$

und

$$\sum_{i=1}^n \lambda^*(S_{2i-1} \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=1}^n S_{2i-1} \cap B\right) \leq \lambda^*(B) < \infty.$$

Diese Abschätzungen zeigen, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(S_i \cap B)$ beschränkt ist durch $2\lambda^*(B)$ und darum konvergiert. Es folgt, dass

$$\lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) = \lambda^*\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} S_i \cap B\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \lambda^*(S_i \cap B) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und nehme n derart, dass $\lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) < \varepsilon$. Dann gilt wegen Subadditivität und Lemma 4.4, dass

$$\begin{aligned} \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) &\leq \lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) + \lambda^*(A_n \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) = \\ &= \lambda^*((A \setminus A_n) \cap B) + \lambda^*((A_n \cup A^c) \cap B) < \varepsilon + \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Weil diese Abschätzungen für beliebige $\varepsilon > 0$ gemacht werden können, gilt

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A^c \cap B) \leq \lambda^*(B)$$

und so haben wir erreicht, dass $A \in \mathcal{L}$. ■

4.2 Approximieren von Aussen und von Innen

Satz 4.5 Für jedes $M \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \inf \{ \lambda(O); M \subset O \text{ offen} \}, \\ \lambda(M) &= \sup \{ \lambda(K); M \supset K \text{ kompakt} \}. \end{aligned}$$

Beweis. 1) Wenn $\lambda(M) = \infty$, dann liefert $M \subset O$ auch $\lambda(O) = \infty$, und man ist fertig. Wir dürfen also annehmen, dass $\lambda(M) < \infty$. Es gilt, dass

$$\lambda(M) = \lambda^*(M) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i); \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \supset M \text{ mit } B_i \text{ Blöcke} \right\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Blöcke $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \supset M$ und

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i) < \lambda^*(M) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Man ersetzt

$$B_i = [a_{i,1}, b_{i,1}) \times \cdots \times [a_{i,n}, b_{i,n})$$

durch

$$\tilde{B}_i = (a_{i,1} - \delta_i, b_{i,1}) \times \cdots \times (a_{i,n} - \delta_i, b_{i,n})$$

und nimmt $\delta_i > 0$ genügend klein, nämlich derart, dass

$$\text{Vol}(\tilde{B}_i) \leq \text{Vol}(B_i) + 2^{-i-2}\varepsilon.$$

So findet man $O := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{B}_i$ ist offen, $M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \subset O$ und

$$\lambda(O) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(\tilde{B}_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(B_i) + \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i-2}\varepsilon < \lambda(M) + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist die erste Behauptung bewiesen.

2) Wenn M beschränkt ist, sagen wir $M \subset B_R(0)$, dann betrachtet man $B_R(0) \setminus M$ und nimmt eine offene Menge $O \supset B_R(0) \setminus M$ mit

$$\lambda(O) < \lambda(B_R(0) \setminus M) + \varepsilon.$$

Man definiert $K = \overline{B_R(0)} \cap O^c$. Dann ist K kompakt, liegt innerhalb von M und

$$\begin{aligned} \lambda(K) &= \lambda(\overline{B_R(0)}) - \lambda(\overline{B_R(0)} \cap O) \geq \lambda(B_R(0)) - \lambda(O) > \\ &> \lambda(B_R(0)) - \lambda(B_R(0) \setminus M) - \varepsilon = \lambda(M) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Wenn M unbeschränkt ist, betrachten wir $M_n = M \cap B_n(0)$ und nehmen eine kompakte Menge $K_n \subset M_n$ mit $\lambda(K_n) > \lambda(M_n) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Es gibt zwei Möglichkeiten, entweder $\lambda(M) =$

∞ oder $\lambda(M) < \infty$. Wenn $\lambda(M) = \infty$ dann hat man $\lambda(M_n) \rightarrow \infty$ und auch $\lambda(K_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Wenn $\lambda(M) < \infty$, dann gilt $\lambda(M_n) \rightarrow \lambda(M)$, und $\{\lambda(M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist sogar eine wachsende Folge. Es gibt also $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ derart, dass $\lambda(M_n) > \lambda(M) - \frac{1}{2}\varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Es gilt für K_{n_ε} , dass $K_{n_\varepsilon} \subset M_{n_\varepsilon} \subset M$ und

$$\lambda(K_{n_\varepsilon}) > \lambda(M_{n_\varepsilon}) - \frac{1}{2}\varepsilon > \lambda(M) - \varepsilon.$$

Weil dies für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, hat man die zweite Behauptung bewiesen. ■

Beispiel 4.6 *Obwohl Lebesgue-messbare Mengen von außen mit offenen Mengen und von innen mit kompakten Mengen approximiert werden können, kann so eine Lebesgue-messbare Menge noch ziemlich wild aussehen. Die Cantor-Menge C konstruiert man, indem man das mittlere Drittel von $[0, 1]$ entfernt, und aus den beiden Restintervalle wiederum das mittlere Drittel entfernt usw:*

$$C_0 = [0, 1], \quad C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \dots$$

Man setzt

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Weil $\lambda(C_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(C_n)$ und $\lambda(C_0) = 1$ folgt $\lambda(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Weil $\lambda(C) \leq \lambda(C_n)$ findet man $\lambda(C) = 0$. Trotzdem ist C nicht abzählbar.

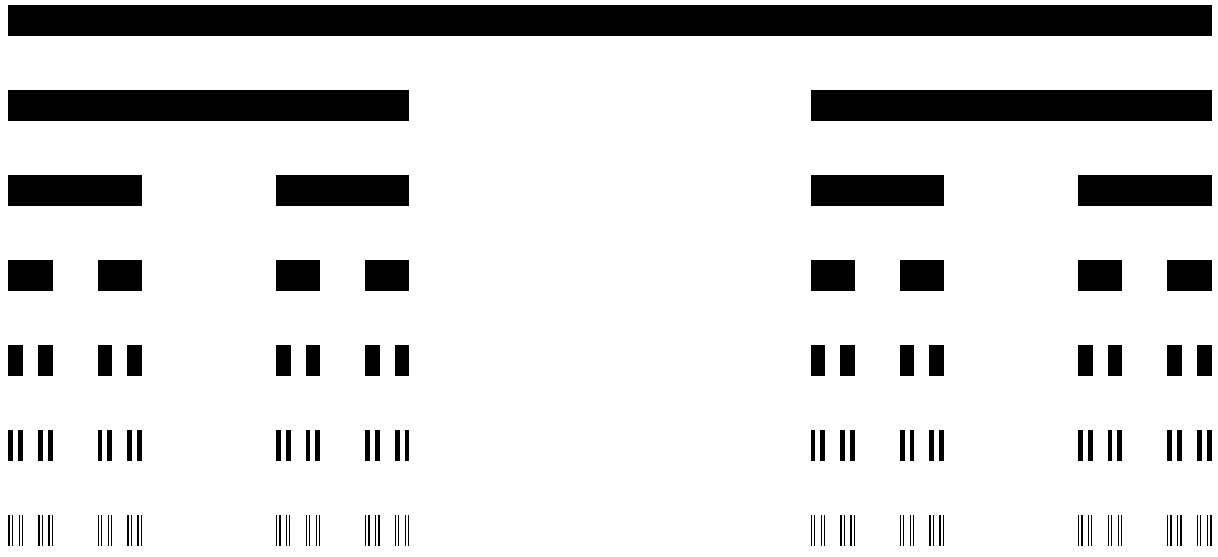


Abbildung 4.2: Die ersten 6 Schritte in der Konstruktion der Cantor-Menge

Beispiel 4.7 *Man kann in der Konstruktion der Cantor-Menge im n -ten Schritt statt Intervalle mit Länge $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ Intervalle mit Länge $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ entfernen:*

$$C_0^* = [0, 1], \quad C_1^* = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right], \quad C_2^* = \left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right], \dots$$

Diese Menge $C_f = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n^*$ wird auch die fette Cantor-Menge genannt. Man hat $\lambda(C_n^*) = 1 - \sum_{k=1}^n 2^{k-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ und weil man von Aussen mit offenen Mengen C_n^* und auch C_f approximieren kann, folgt

$$\lambda(C_f) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{2}.$$

Trotzdem enthält C_f kein Intervall mit positiver Länge und es gilt $(\overline{C_f})^\circ = \emptyset$.



Abbildung 4.3: Die fette Cantor-Menge

4.3 Nicht alles ist Lebesgue-messbar

Satz 4.2 sagt aus, dass alle Teilmengen von \mathbb{R}^n , die man bekommt durch abzählbare Mengenoperationen (Vereinigung, Schnitt oder Komplementbildung) von offenen und abgeschlossenen Mengen, Lebesgue-messbar sind. Das sind sehr viele Teilmengen. Gibt es denn überhaupt nicht-Lebesgue-messbare Mengen?

Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir das folgende Ergebnis.

Satz 4.8 (Steinhaus) Wenn für $A \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt, dass $\lambda(A) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$ derart, dass

$$B_\delta(0) \subset A - A := \{x - y; x, y \in A\}.$$

Beweis. Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A \cap B_n(0)) = \lambda(A)$ wegen Satz 2.7, dürfen wir annehmen, dass es $r > 0$ gibt mit $\lambda(A \cap B_r(0)) > 0$. Für $\tilde{A} = A \cap B_r(0)$ gibt es wegen Satz 4.5 für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K und eine offene Menge O derart, dass $K \subset \tilde{A} \subset O$ und mit

$$\lambda(O) - \varepsilon < \lambda(\tilde{A}) < \lambda(K) + \varepsilon.$$

Nehmen wir $\varepsilon = \frac{1}{3}\lambda(\tilde{A})$, dann folgt

$$\lambda(O) < \frac{4}{3}\lambda(\tilde{A}) \text{ und } \frac{2}{3}\lambda(\tilde{A}) < \lambda(K)$$

und wir finden, dass

$$\lambda(O) < \frac{4}{3}\lambda(\tilde{A}) < 2\lambda(K). \quad (4.1)$$

Weil $K \subset O$ und O offen ist, gibt es für jedes $x \in K$ ein $r_x > 0$ mit $B_{r_x}(x) \subset O$. Die Menge K wird auch von $\left\{B_{\frac{1}{2}r_x}(x); x \in K\right\}$ überdeckt und $B_{\frac{1}{2}r_x}(x) \subset O$. Weil K kompakt ist, gibt es endlich viele $\left\{B_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i)\right\}_{i=1}^{\ell}$, die K schon überdecken. Das heißt, für jedes $x \in K$ gibt es $i \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $x \in B_{\frac{1}{2}r_{x_i}}(x_i)$ und es gilt

$$d(x, O^c) \geq d(x_i, O^c) - \|x - x_i\| \geq r_{x_i} - \frac{1}{2}r_{x_i} = \frac{1}{2}r_{x_i}.$$

Es folgt

$$\delta := d(K, O^c) \geq \min \left\{ r_{\frac{1}{2}x_i}; 1 \leq i \leq \ell \right\} > 0.$$

Wir behaupten $B_\delta(0) \subset A - A$. Sei $x \in B_\delta(0)$ und nehmen wir an $x \notin K - K$. Dann gilt für $x + K = \{x + y; y \in K\} \subset O$, dass

$$K \cup (x + K) \subset O \text{ und } K \cap (x + K) = \emptyset.$$

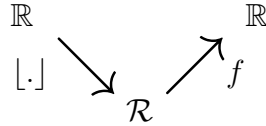
Es folgt

$$\lambda(O) \geq \lambda(K \cup (x + K)) = \lambda(K) + \lambda(x + K) - \lambda(K \cap (x + K)) = 2\lambda(K), \quad (4.2)$$

und dies ist ein Widerspruch zu (4.1). Also gilt $B_\delta(0) \subset K - K \subset A - A$. ■

Beispiel 4.9 (Eine nicht-Lebesgue-messbare Menge.) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $[x] = x + \mathbb{Q}$ und $\mathcal{R} = \{[x]; x \in \mathbb{R}\}$. (\mathcal{R} ist als Menge isomorph zu \mathbb{R}/\mathbb{Q})

Bemerke, dass $[x] = [y]$ genau dann, wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Das Auswahlaxiom lässt uns für jedes $R \in \mathcal{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit $R = [x]$. Nennen wir diese Vorschrift f . Wir werden zeigen, dass $f(\mathcal{R})$ nicht Lebesgue-messbar ist.



Für einen Widerspruchsbeweis nimmt man an, dass $f(\mathcal{R})$ Lebesgue-messbar ist.

Wenn $\lambda(f(\mathcal{R})) > 0$, dann folgt aus dem Satz von Steinhaus, dass die Menge $f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})$ eine Umgebung von 0 enthält. Weil für $x, y \in f(\mathcal{R})$ mit $x \neq y$ gilt, dass $x - y \notin \mathbb{Q}$, folgt

$$\mathbb{Q} \cap (f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})) = \{0\}$$

und man hat einen Widerspruch.

Wenn $\lambda(f(\mathcal{R})) = 0$, dann gilt auch $\lambda(f(\mathcal{R}) + \mathbb{Q}) = 0$ und hat man wegen

$$f(\mathcal{R}) + \mathbb{Q} = \bigcup \{q + f(\mathcal{R}); q \in \mathbb{Q}\}$$

und der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} , dass $\lambda(f(\mathcal{R}) + \mathbb{Q}) = 0$. Weil

$$\mathbb{R} = \bigcup \{[x]; x \in f(\mathcal{R})\} = f(\mathcal{R}) + \mathbb{Q}$$

gibt das einen Widerspruch zu $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$.

Die Annahme, dass $f(\mathcal{R})$ Lebesgue-messbar ist, muss falsch sein.

Analysis 3, Woche 5

Lebesgue-Integral



5.1 Definition des Lebesgue-Integrals

5.1.1 Für einfache Funktionen

Wenn wir $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten, nehmen wir an, dass $X \in \mathcal{L}$.

Definition 5.1 Eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ heißt **einfach**, wenn $f(X)$ abzählbar ist.

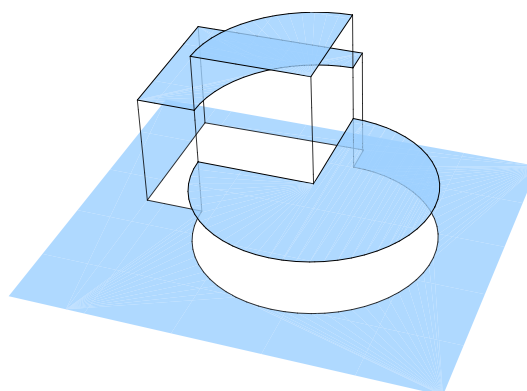
Wenn die Bildmenge unendlich abzählbar ist, sagen wir $f(X) = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i \in [-\infty, \infty]$, dann bedeutet das, dass X die disjunkte Vereinigung der Urbilder $\{f^{-1}(y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist. Setzen wir $A_i := f^{-1}(y_i)$, dann folgt

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}. \quad (5.1)$$

Die Funktion $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Man nennt $\mathbf{1}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die **Indikatorfunktion**¹ von $A \subset \mathbb{R}^n$.



In der Abbildung findet man eine Darstellung von $f = \mathbf{1}_K + 2 \mathbf{1}_R$ mit K einer Kreisscheibe und R einem Rechteck. Es gilt übrigens, dass $f = \mathbf{1}_{K \setminus R} + 2 \mathbf{1}_{R \setminus K} + 3 \mathbf{1}_{R \cap K}$.

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_Y -messbar, wenn für alle \mathcal{L}_Y -messbare B gilt, dass $A := f^{-1}(B)$ \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_Y -messbar ist. Die einfache Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in (5.1) ist also \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbar genau dann, wenn die A_i \mathcal{L} -messbar sind für alle $i \in \mathbb{N}$.

¹Die Indikatorfunktion zu A wird auch die charakteristische Funktion zu A genannt. Oft schreibt man auch χ_A statt $\mathbf{1}_A$.

Definition 5.2 Für eine nichtnegative **einfache** Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ der Form

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i},$$

mit A_i \mathcal{L} -messbar für alle $i \in \mathbb{N}$, definiert man

$$\int_X f \, d\lambda = \begin{cases} \sum_{i \in \mathbb{N} \text{ mit } y_i \in [0, \infty)} y_i \lambda(A_i) & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0, \\ \infty & \text{falls } \lambda(f^{-1}(\{\infty\})) > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Bemerkung 5.2.1 Auch wenn $\lambda(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ kann die Summe ∞ werden. Weil in der Summe in (5.2) jedoch nur über nicht-negative Zahlen summiert wird, gibt es in jedem Fall keine Ambivalenz bezüglich der Reihenfolge in dieser Summe.

Als nächstes wollen wir auch Funktionen zulassen, die das Vorzeichen wechseln. Wenn man sich nicht einschränkt kann es passieren, dass $\infty - \infty$ erscheint. Um derartige Probleme zu vermeiden, gehen wir wie folgt voran.

Lemma 5.3 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine **einfache** \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbare Funktion. Dann sind f^+ und f^- , definiert durch

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

einfache \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbare Funktionen und sind $\int_X f^+ \, d\lambda$ und $\int_X f^- \, d\lambda$ wohldefiniert in $[0, \infty]$.

Man hat $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

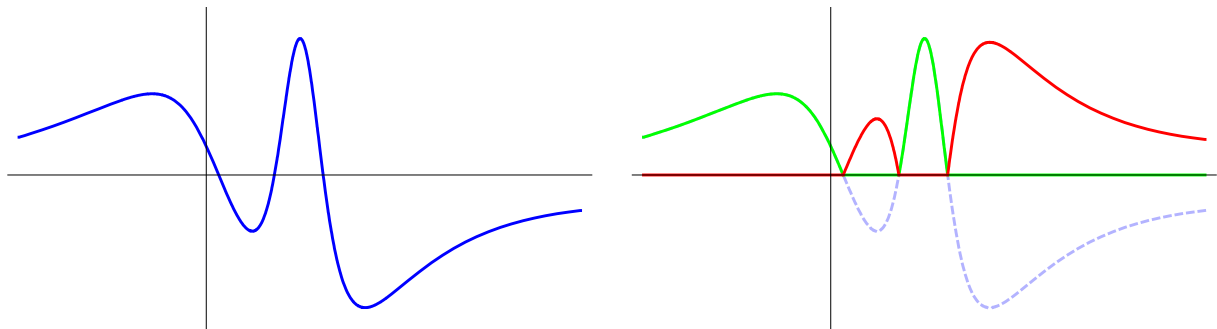


Abbildung 5.1: Links der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und rechts der für f^+ und f^- .

Beweis. Wenn $A \in \mathcal{L}$, dann gilt auch $A_+ = A \cap (0, \infty) \in \mathcal{L}$, $A_0 = A \cap \{0\} \in \mathcal{L}$ und $A_- = A \cap (-\infty, 0) \in \mathcal{L}$. Weil $A = A_+ \cup A_0 \cup A_-$ gilt auch

$$(f^+)^{-1}(A) = (f^+)^{-1}(A_+) \cup (f^+)^{-1}(A_0) \cup (f^+)^{-1}(A_-).$$

Weil

$$\begin{aligned} (f^+)^{-1}(A_+) &= f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(\{0\}) &= f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L}, \\ (f^+)^{-1}(A_-) &= \emptyset \in \mathcal{L}, \end{aligned}$$

findet man, wenn $A_0 = \{0\}$, dass

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \cup f^{-1}((-\infty, 0]) \in \mathcal{L},$$

und wenn $A_0 = \emptyset$ folgt

$$(f^+)^{-1}(A) = f^{-1}(A_+) \in \mathcal{L}.$$

■

Definition 5.4 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine **einfache** \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbare Funktion. Man nennt f **Lebesgue-integrierbar** auf X , wenn $\int_X f^+ d\lambda < \infty$ und $\int_X f^- d\lambda < \infty$. Man setzt in diesem Fall

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^+ d\lambda - \int_X f^- d\lambda.$$

Bemerkung 5.4.1 Wenn eine Funktion f Lebesgue-integrierbar ist, dann darf sie zwar ∞ und $-\infty$ als Werte annehmen, aber nur auf Nullmengen: $\lambda(\{x \in X; |f(x)| = \infty\}) = 0$. Weil das Lebesgue-Integral eine Nullmenge nicht sieht, kann man in diesem Fall die Lebesgue-integrierbare Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$ ersetzen durch eine ebenfalls Lebesgue-integrierbare Funktion $f^* : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } |f(x)| \neq \infty, \\ 0 & \text{falls } |f(x)| = \infty, \end{cases}$$

und findet

$$\int_X f d\lambda = \int_X f^* d\lambda.$$

Das heißt wiederum, dass wir uns bei den Lebesgue-integrierbaren Funktionen weiter einschränken können auf Funktionen mit $f(X) \subset \mathbb{R}$ statt $f(X) \subset [-\infty, \infty]$.

5.1.2 Für allgemeinere Funktionen

Die folgende Konstruktion sollte einem bekannt vorkommen. Der Unterschied zum Integral aus den Analysis-1&2-Vorlesungen ist, dass nun viel mehr Teilmengen beim Approximieren zugelassen sind.

Definition 5.5 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$. Wir definieren **das obere Integral** durch

$$\overline{\int}_X f d\lambda = \inf \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } f \leq g \right\},$$

und **das untere Integral** durch

$$\underline{\int}_X f d\lambda = \sup \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\}.$$

Bemerkung 5.5.1 Das Supremum von $G \subset \mathbb{R}$ ist definiert als die kleinste obere Schranke und s ist eine obere Schranke für G , wenn $x \leq s$ für alle $x \in G$. Wenn G die leere Menge ist, ist jedes $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke und man definiert $\sup \emptyset = -\infty$. Ebenso setzt man $\inf \emptyset = \infty$. Wenn es also keine einfache Lebesgue-integrierbare Funktion oberhalb von f gibt, setzt man $\overline{\int}_X f d\lambda = \infty$.

Bemerkung 5.5.2 Für einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen g gilt

$$\overline{\int}_X f \, d\lambda = \int_{\underline{X}} f \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Lemma 5.6 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$. Dann gilt

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int}_X f \, d\lambda.$$

Ein Beweis wird dem Leser überlassen.

Definition 5.7 (Lebesgue-Integral) Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$. Wenn

$$\overline{\int}_X f \, d\lambda = \int_{\underline{X}} f \, d\lambda =: I \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

heißt f **Lebesgue-integrierbar über X** . Dieses I nennt man das **Lebesgue-Integral von f über X** und man schreibt

$$\int_X f \, d\lambda := I.$$

Bemerkung 5.7.1 Auch hier trifft Bemerkung 5.4.1 zu und ab jetzt werden wir nur Funktionen $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Das bedeutet aber nicht, dass f beschränkt sein muss.

Definition 5.8 Für die Menge aller Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $\mathcal{L}(X)$ oder $\mathcal{L}^1(X)$

Man nennt eine Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **lokal Lebesgue-integrierbar auf X** , wenn $f|_K : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist. Für die Menge aller lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man $\mathcal{L}_{\text{lok}}(X)$ oder $\mathcal{L}_{\text{lok}}^1(X)$.

Lemma 5.9 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty)$. Wenn man für jedes $\varepsilon > 0$ zwei einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen $g_1, g_2 : X \rightarrow (-\infty, \infty)$ finden kann derart, dass

1. $g_1 \leq f \leq g_2$ und
2. $\int_X g_2 \, d\lambda \leq \int_X g_1 \, d\lambda + \varepsilon$,

dann ist f Lebesgue-integrierbar über X und

$$\int_X g_1 \, d\lambda \leq \int_X f \, d\lambda \leq \int_X g_2 \, d\lambda.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, dann hat man einfache, Lebesgue-integrierbare Funktionen g_1, g_2 mit

$$\int_X g_1 \, d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int}_X f \, d\lambda \leq \int_X g_2 \, d\lambda \leq \int_X g_1 \, d\lambda + \varepsilon.$$

Also gilt $\int_{\underline{X}} f \, d\lambda \in \mathbb{R}$ und auch

$$\int_{\underline{X}} f \, d\lambda \leq \overline{\int}_X f \, d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f \, d\lambda + \varepsilon.$$

Weil diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (5.3) und die Lebesgue-Integrierbarkeit.

■

Der wichtigste Unterschied vom Lebesgue-Integral zum Riemann-Integral ist die Vielzahl der Approximationsmöglichkeiten. Die elementaren Funktionen sind nun auf Lebesgue-messbare Mengen definiert und dürfen abzählbar viele Werte annehmen. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar. Weil \mathbb{Q} abzählbar ist, ist diese Funktion sogar einfach. Weil $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 0.$$

Bemerkung 5.9.1 Sei X eine Teilmenge von \mathbb{R}^n , die uns erlaubt das Riemann-Integral über X zu definieren. Wenn $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f(x) \, dx.$$

Diese Aussage trifft nicht unbedingt zu, wenn man sich das uneigentliche Riemann-Integral anschaut.

Wenn man $\int_0^1 f(x) \, dx$ für $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ betrachtet, dann findet man für das uneigentliche Riemann-Integral

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \, dx \text{ existiert in } \mathbb{R}$$

aber auch

$$\int_{\underline{(0,1)}} f \, d\lambda = -\infty \text{ und } \int_{\overline{(0,1)}} f \, d\lambda = \infty,$$

denn weil $\int_0^1 f^+(x) \, dx = \infty = \int_0^1 f^-(x) \, dx$ gilt, gibt es keine einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen sowohl oberhalb von f als auch unterhalb von f .

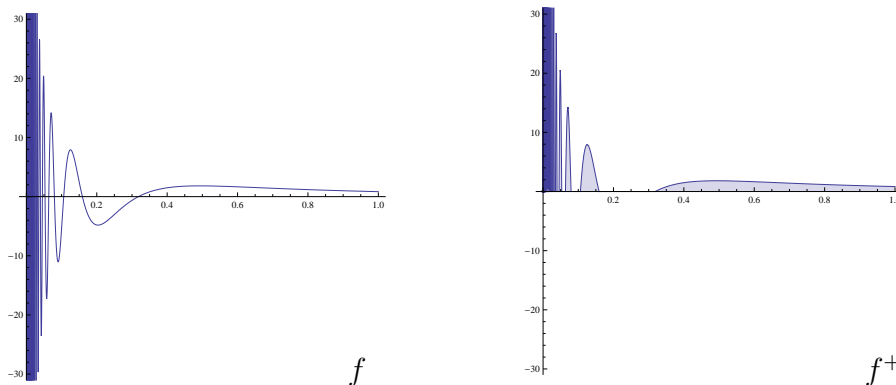


Abbildung 5.2: Der n -te Buckel von rechts für $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, gemeint ist der auf dem Intervall $\left(\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}\right)$, hat eine Flächeninhalt der Größenordnung $\frac{1}{n}$. Für das uneigentliche Riemann-Integral findet man so eine konvergente alternierende Folge, die jedoch nicht absolut konvergiert.

5.2 Von stetig zu integrierbar

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, wenn:

$$B \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

Dann folgt auch

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Satz 4.2 hat uns gezeigt, dass die Borel-Mengen in \mathbb{R}^n in der Lebesgue- σ -Algebra liegen. Also weil $\mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gilt, folgt

$$B \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

und das liefert uns genau:

Lemma 5.10 *Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.*

Um zu zeigen, dass f \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbar ist, müsste man beweisen, dass

$$B \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Weil \mathcal{L} mehr Mengen enthält als $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ wäre dies eine schwerere Bedingung.

Setzen wir

$$A_{n,k} = f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n})) \text{ und } A_{\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| = \infty\}.$$

Wenn $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist, dann folgt aus die Tatsache, dass halboffene Intervalle $[a, b)$ Borel-Mengen sind, dass die $A_{n,k} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ \mathcal{L} -messbar sind. Dann folgt wiederum, dass

$$g_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} \text{ und } h_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k+1)2^{-n} \mathbf{1}_{A_{n,k}}$$

einfache \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbare Funktionen sind und außerdem gilt für $x \in A_{n,k}$, dass

$$g_n(x) = k2^{-n} \leq f(x) \leq (k+1)2^{-n} = h_n(x).$$

Weil die $\{A_{n,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ disjunkt sind und weil $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_{n,k} = \mathbb{R}$, folgt

$$g_n \leq f \leq h_n \leq g_n + 2^{-n} \text{ auf } X. \quad (5.4)$$

Lemma 5.11 *Sei $\lambda(X) < \infty$. Dann ist eine beschränkte \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X .*

Beweis. Man verwende (5.4) und $\lambda(X) < \infty$. ■

Bemerkung 5.11.1 *Weil stetige Funktionen auf kompakte Teilmengen beschränkt sind, ist $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, mit f stetig und K kompakt, Lebesgue-integrierbar über K .*

5.3 Kombinationen messbarer Funktionen

Wir haben nun messbar und integrierbar definiert aber haben Fragen, wie man mit solchen Funktionen rechnet, bis jetzt unbeachtet gelassen.

Einige Resultate, die nützlich sind wenn man mit \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen rechnet, folgen:

Satz 5.12 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Seien $f, g, f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für $k \in \mathbb{N}$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$cf, f + g, fg, |f|, \min(f, g), \max(f, g), \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k, \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \text{ und } \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$$

\mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar. Wenn $g(x) \neq 0$ für $x \in X$ ist auch $\frac{1}{g}$ \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

Beweis. Weil die offenen Intervalle eine Basis für \mathcal{T} bilden, reicht es, wenn wir nur die \mathcal{A} -Messbarkeit der Urbilder von Intervallen (a, b) zeigen. Weil

$$(a, b) = (a, \infty) \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (b - 2^{-n}, \infty)$$

können wir uns sogar beschränken auf Intervalle (a, ∞) .

1) cf . Für $c > 0$ findet man

$$\begin{aligned} (cf)^{-1}(a, \infty) &= \{x \in X \text{ mit } cf(x) \in (a, \infty)\} \\ &= \{x \in X \text{ mit } f(x) \in (c^{-1}a, \infty)\} = f^{-1}(c^{-1}a, \infty) \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Für $c < 0$ folgt ähnlich

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = f^{-1}(-\infty, c^{-1}a) \in \mathcal{A}$$

und für $c = 0$ finden wir

$$(cf)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & \text{falls } a \geq 0, \\ X \in \mathcal{A} & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

2) $f + g$. Man kann kontrollieren, dass

$$(f + g)^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbb{Q} \\ p+q > a}} (f^{-1}(p, \infty) \cap g^{-1}(q, \infty)),$$

und diese Menge ist \mathcal{A} -messbar als eine abzählbare Vereinigung von \mathcal{A} -messbaren Mengen.

3) fg . Weil $fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$ genügt es, wenn wir nur f^2 betrachten:

$$(f^2)^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(\sqrt{a}, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -\sqrt{a}) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0, \end{cases}$$

ist \mathcal{A} -messbar.

4) $|f|$. Man hat

$$|f|^{-1}(a, \infty) = \begin{cases} f^{-1}(a, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -a) & \text{für } a \geq 0, \\ X & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

5) Weil $\min(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}|f - g|$ und $\max(f, g) = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}|f - g|$ folgt die Messbarkeit aus den vorhergehenden Ergebnissen.

6) $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Man verwende:

$$\left(\inf_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} [a, \infty) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} [a, \infty).$$

7) $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k$. Man verwende:

$$\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \right)^{-1} (a, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (f_k)^{-1} (a, \infty).$$

8) $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$. Man verwende:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} f_k.$$

9) $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$. Ähnlich wie beim \liminf .

10) $\frac{1}{g}$. Das wird eine Hausaufgabe. ■

5.4 Von integrierbar zu fast stetig

Lemma 5.13 Eine lokal Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar.

Beweis. Auf jeder abgeschlossenen Kugel $\overline{B_R(0)}$ ist f Lebesgue-integrierbar. Dann existieren für jede $n \in \mathbb{N}^+$ einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen $g_n, h_n : \overline{B_R(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_n \leq f \leq h_n$$

und

$$\int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} f \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} h_n \, d\lambda \leq \int_{\overline{B_R(0)}} g_n \, d\lambda + \frac{1}{n}. \quad (5.5)$$

Setzen wir $g_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n$ und $h_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}} h_n$, dann sind g_∞ und h_∞ \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar auf $\overline{B_R(0)}$ und außerdem gilt

$$g_\infty \leq f \leq h_\infty, \\ \int_{\overline{B_R(0)}} g_\infty \, d\lambda = \int_{\overline{B_R(0)}} h_\infty \, d\lambda.$$

Setzt man $D_n = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| > \frac{1}{n} \right\}$, dann gilt

$$\lambda(D_n) = 0.$$

Weil

$$D_\infty = \left\{ x \in \overline{B_R(0)}; |g_\infty(x) - h_\infty(x)| \neq 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} D_n$$

hat man $\lambda(D_\infty) = 0$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ hat man

$$g_\infty^{-1}(a, \infty) \subset \left(f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right) \subset h_\infty^{-1}(a, \infty),$$

und weil $\lambda(D_\infty) = 0$ gilt, ist $h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus g_\infty^{-1}(a, \infty)$ eine Nullmenge. Weil

$$h_\infty^{-1}(a, \infty) \setminus \left(f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)} \right)$$

eine Teilmenge einer Nullmenge ist und weil \mathcal{L} vollständig ist, ist diese Menge und auch $f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$ \mathcal{L} -messbar. Dann ist auch $f^{-1}(a, \infty) = \bigcup_{R \in \mathbb{N}^+} f^{-1}(a, \infty) \cap \overline{B_R(0)}$ \mathcal{L} -messbar. Wir finden, dass die Funktion f \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbar ist. ■

Beispiel 5.14 Funktion $\mathbf{1}_\mathbb{Q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_\mathbb{Q}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist \mathcal{L} - \mathcal{L} -messbar, sogar Lebesgue-integrierbar auf \mathbb{R} , aber auch nirgends stetig. Denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ gibt es $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ und $|\mathbf{1}_\mathbb{Q}(x) - \mathbf{1}_\mathbb{Q}(y)| > \frac{1}{2}$. Jedoch $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ ist eine messbare Funktion und nicht sehr weit entfernt von einer stetigen Funktion. Für jedes beschränkte Intervall $[a, b]$ und $\varepsilon > 0$ kann man eine kompakte Teilmenge $K \subset [a, b]$ finden mit $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$ derart, dass $\mathbf{1}_\mathbb{Q} : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Eine Konstruktion von K ist zum Beispiel die folgende.

Sei $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ und setze

$$K = [a, b] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (q_i - 2^{-2-i}\varepsilon, q_i + 2^{-2-i}\varepsilon).$$

Man zeigt direkt, dass K beschränkt, abgeschlossen und darum auch kompakt ist, und dass $\lambda([a, b] \setminus K) < \varepsilon$ gilt. Weil $(\mathbf{1}_\mathbb{Q})|_K = 0$, ist diese Funktion sogar konstant auf K .

Obwohl dieses Beispiel zeigt, dass messbare und integrierbare Funktionen nirgends stetig zu sein brauchen, zeigt das folgende Ergebnis, dass eine messbare Funktion doch auch wieder nicht sehr weit entfernt ist von einer stetigen Funktion.

Satz 5.15 (Lusin) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbar, sei $A \subset \mathbb{R}^n$, mit $A \in \mathcal{L}$ und $\lambda(A) < \infty$, und sei $\varepsilon > 0$, dann existiert eine kompakte Menge $K \subset A$ derart, dass

1. $\lambda(A \setminus K) < \varepsilon$ und
2. $f|_K$ ist stetig.

Bemerkung 5.15.1 Der ursprüngliche Satz ist allgemeiner formuliert. Wir haben uns den Satz von Lusin zurecht geschnitten für das Lebesgue-Maß.

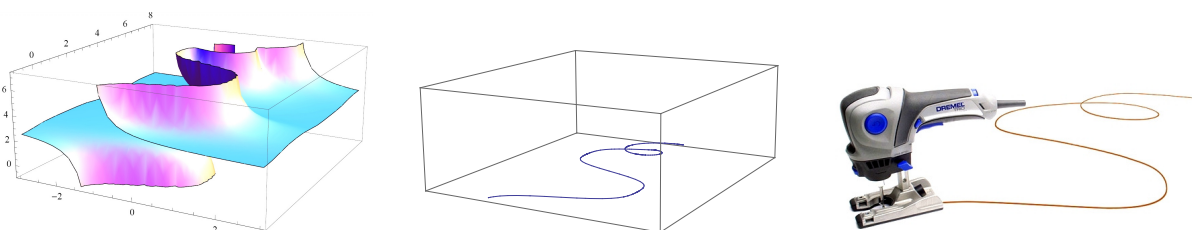


Abbildung 5.3: Man kann eine beliebig kleine Menge aus dem Definitionsbereich herausnehmen und bekommt eine stetige Funktion auf dem Rest.

Beweis. Setze $B_{i,j} = [\frac{j}{i+1}, \frac{j+1}{i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{Z}$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ hat man $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} B_{i,j}$. Als nächstes definieren wir

$$A_{i,j} = A \cap f^{-1}(B_{i,j}).$$

Bemerke, dass $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} = A$. Weil f eine messbare Funktion ist, sind sowohl $f^{-1}(B_{i,j})$ als auch $A_{i,j}$ messbar. Wegen Satz 4.5 gibt es kompakte $K_{i,j} \subset A_{i,j}$ mit $\lambda(A_{i,j} \setminus K_{i,j}) < 2^{-3-i-|j|}\varepsilon$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \lambda\left(A \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} A_{i,j} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} K_{i,j}\right) \leq \\ &\leq \lambda\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} (A_{i,j} \setminus K_{i,j})\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-3-i-|j|}\varepsilon < 2^{-1-i}\varepsilon. \end{aligned}$$

Dann gibt es $N_{\varepsilon,i} \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda\left(A \setminus \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}\right) < 2^{-1-i}\varepsilon.$$

Definieren wir $K_i = \bigcup_{|j| \leq N_{\varepsilon,i}} K_{i,j}$ und $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_i(x) = \frac{j}{i+1} \text{ falls } x \in K_{i,j}.$$

Weil die $\{A_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ und deshalb auch die $\{K_{i,j}\}_{j \in \mathbb{Z}}$ disjunkt sind, sind diese Funktionen wohldefiniert. Weil die $K_{i,j}$ kompakt sind, gilt $d(K_{i,j_1}, K_{i,j_2}) > 0$ für $j_1 \neq j_2$ und die f_i sind stetig auf K_i . Außerdem sind die f_i so definiert, dass

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{i+1} \text{ für alle } x \in K_i.$$

Nun setzen wir $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Die Menge K ist kompakt und

$$\lambda(A \setminus K) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(A \setminus K_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-1-i}\varepsilon = \varepsilon.$$

Außerdem gilt, dass die f_i stetig sind auf K und dass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f \text{ gleichmäßig auf } K.$$

Dann ist auch f stetig auf K . ■

5.5 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Für das Lebesgue-Integral gibt es ähnliche Ergebnisse wie beim Riemann-Integral.

Lemma 5.16 Seien $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X und sei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha f_1 + \beta f_2$ Lebesgue-integrierbar über X und

$$\int_X (\alpha f_1 + \beta f_2) d\lambda = \alpha \int_X f_1 d\lambda + \beta \int_X f_2 d\lambda.$$

Bemerkung 5.16.1 Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen über X , also $\mathcal{L}(X)$, bilden einen Vektorraum. Wenn man dabei eine Norm haben möchte, könnte man sich überlegen, ob $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)}$ definiert durch

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = \int_X |f| \, d\lambda$$

vernünftig wäre. Die meisten Eigenschaften eines Norms sind erfüllt. Aus $\|f\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ folgt aber nicht, dass $f = 0$ sondern nur $\lambda(\{x \in X; f(x) \neq 0\}) = 0$.

Beweis. Wenn α und β positiv sind, kann man aus einfachen Funktionen $g_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{1,i} \mathbf{1}_{A_{1,i}}$ oberhalb von f_1 und $g_2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_{2,i} \mathbf{1}_{A_{2,i}}$ oberhalb von f_2 eine neue konstruieren, die oberhalb der Summe $\alpha f_1 + \beta f_2$ liegt. Man definiere

$$g = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} (\alpha y_{1,i} + \beta y_{2,j}) \mathbf{1}_{A_{1,i} \cap A_{2,j}}. \quad (5.6)$$

Mit (5.6) und Lemma 5.9 kann man nun das gewünschte Resultat bekommen. Wenn zum Beispiel $\alpha < 0$, dann verwendet man für diese Konstruktion eine unterhalb liegende einfache Funktion. Eine ähnliche Änderung ist notwendig falls $\beta < 0$. ■

Lemma 5.17 Sei $f : X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X_1 und über X_2 . Wenn $\lambda(X_1 \cap X_2) = 0$, dann gilt f ist Lebesgue-integrierbar über $X_1 \cup X_2$ und

$$\int_{X_1 \cup X_2} f \, d\lambda = \int_{X_1} f \, d\lambda + \int_{X_2} f \, d\lambda.$$

Beweis. Für den Leser. ■

Lemma 5.18 Falls $f_1, f_2 : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind über X und $f_1 \leq f_2$, dann gilt

$$\int_X f_1 \, d\lambda \leq \int_X f_2 \, d\lambda.$$

Beweis. Für den Leser. ■

Lemma 5.19 Falls $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist über X , dann ist $|f|$ Lebesgue-integrierbar über X und es gilt

$$\left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d\lambda.$$

Beweis. Für den Leser. ■

Analysis 3, Woche 6

Konvergenz in Sorten



6.1 Lebesgue-Klassen

Von den messbaren Mengen sind die Nullmengen eigentlich nicht sehr interessant. Man bemerkt sie kaum, weil sie so klein sind. Ebenso ist es, wenn man messbare Funktionen betrachtet, meistens nicht sehr interessant, was diese auf Nullmengen machen. Werden Funktionen integriert, dann ist der Wert des Integrals unabhängig von den Funktionswerten auf Nullmengen. Für Funktionen, die nur auf Nullmengen verschieden sind, definiert man daher folgendes.

Definition 6.1 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Man sagt

$$f = g \text{ } \mu\text{-fast-überall auf } A \subset X,$$

wenn $\mu \{x \in A; f(x) \neq g(x)\} = 0$. Abgekürzt: $f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.}$ ¹

Für die \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen auf $X \subset \mathbb{R}^n$ definiert man so eine Äquivalenzrelation:

$$f \sim g \text{ auf } X \text{ genau dann, wenn } f = g \text{ } \mu\text{-f.ü. auf } X.$$

Für die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathcal{L}^1(X)$ bezüglich \sim wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$L^1(X) := \mathcal{L}^1(X) / \sim.$$

Das Auswahlaxiom erlaubt uns, aus jeder Klasse $\mathbf{f} \in L^1(X)$ einen Vertreter $f \in \mathcal{L}^1(X)$ zu finden, und man definiert

$$\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} := \int_X |f| \, d\lambda.$$

Für diesen Vektorraum $L^1(X)$ ist $\|\cdot\|_{L^1(X)}$ eine Norm. Man bemerke, dass diese Norm nicht abhängt vom gewählten Vertreter: Wenn f_1 und f_2 beide \mathbf{f} vertreten, dann heißt das $f_1 = f_2$ λ -f.ü. und bedeutet, dass eine einfache Funktion oberhalb von $|f_1|$ nur auf Nullmengen geändert werden muss (man ersetzt den Funktionswert dieser einfachen Funktion auf diesen Nullmengen durch ∞), um eine einfache Funktion oberhalb von $|f_2|$ zu finden. Ähnliches gilt für einfache Funktionen unterhalb von $|f_1|$ und man findet

$$\int_X |f_1| \, d\lambda = \int_X |f_2| \, d\lambda.$$

¹In Englisch: f.ü = a.e. (almost everywhere)

Lemma 6.2 Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L} -messbar. Dann ist $(L^1(X), \|\cdot\|_{L^1(X)})$ ein normierter Raum.

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass $\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)}$ wohldefiniert ist für $\mathbf{f} \in L^1(X)$ und müssen nur noch zeigen, dass die Eigenschaften einer Norm erfüllt sind.

1. Wenn $\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} = 0$, dann bedeutet dies, dass $\int_X |f| d\lambda = 0$ für einen Vertreter f von \mathbf{f} . Wenn $\int_X |f| d\lambda = 0$ folgt $f = 0$ λ -f.ü. und das bedeutet wiederum $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ in $L^1(X)$.
2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wenn f ein Vertreter von \mathbf{f} ist, ist αf ein Vertreter von $\alpha \mathbf{f}$, und es folgt

$$\|\alpha \mathbf{f}\|_{L^1(X)} = \int_X |\alpha f| d\lambda = |\alpha| \int_X |f| d\lambda = |\alpha| \|\mathbf{f}\|_{L^1(X)}.$$

3. Ähnlich folgt, dass $f + g$ ein Vertreter von $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ ist, und

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{L^1(X)} = \int_X |f + g| d\lambda \leq \int_X (|f| + |g|) d\lambda = \|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} + \|\mathbf{g}\|_{L^1(X)}.$$

■

6.2 Konvergenz bei messbaren Funktionen

In dem Beweis von Satz 5.15 haben wir die Konvergenz von (gleichmäßig) stetigen Funktionen verwendet. Wir erinnern uns an den Satz aus Analysis 2, dass für eine Folge von stetigen Funktionen $\{f_i : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig konvergieren, auch die Grenzfunktion f mit $f(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$ wieder stetig ist. Wie geht man bei Konvergenz von λ -messbaren Funktionen vor?

Für ein Maß μ definieren wir die μ -f.ü.-Konvergenz wie folgt:

Definition 6.3 (Fast-überall-Konvergenz) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ \mathcal{A} - \mathcal{A} -messbare Funktionen. Man sagt:

$$f_k \rightarrow f \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ } \mu\text{-fast-überall auf } A \subset X,$$

wenn es eine messbare Menge $B \subset A$ gibt mit $\mu(A \setminus B) = 0$ und $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in B$.

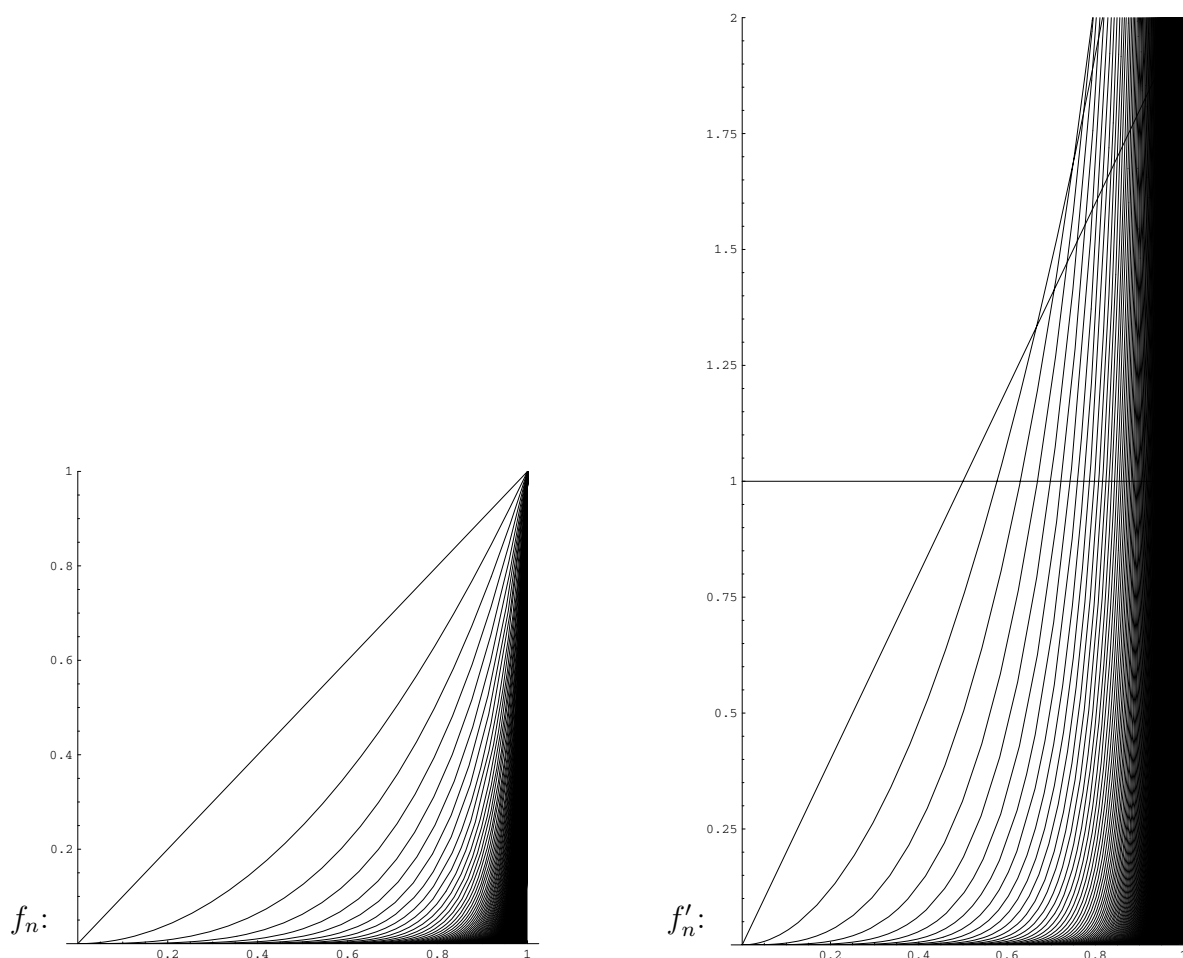
Bemerkung 6.3.1 Für $x \in A \setminus B$ darf die Folge $f_k(x)$ divergieren oder auch konvergieren gegen einen beliebigen Wert.

Beispiel 6.4 Definieren wir für $n \in \mathbb{N}^+$ die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = x^n$, dann gilt

$$f_n \rightarrow 0 \text{ } \lambda\text{-f.a. auf } [0, 1].$$

Sogar gilt

$$f'_n \rightarrow 0 \text{ } \lambda\text{-f.a. auf } [0, 1].$$



Definition 6.5 (Konvergenz in $\mathcal{L}^1(X)$) Sei $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$ für $k \in \mathbb{N}$.
Man sagt $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^1(X)$, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} = 0.$$

Bemerkung 6.5.1 Die Grenzfunktion ist nicht eindeutig; man kann nur sagen, dass alle möglichen Grenzfunktionen zu f_k genau eine Klasse aus $L^1(X)$ bilden.

Für die Funktionen $f_n(x)$ des letzten Beispiels gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$. Weil $\|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 1$ konvergieren die Ableitungen nicht nach 0. Konvergieren sie vielleicht gegen eine andere Funktion g ? Man kann zeigen, dass $\|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1-\varepsilon])} \rightarrow 0$ für $\varepsilon > 0$. Dann folgt $g = 0$ λ -f.ü. auf $[0, 1 - \varepsilon]$, also auf $[0, 1]$, und $\|g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$ liefert einen Widerspruch:

$$\|f'_n - g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} \geq \|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} - \|g\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = \|f'_n\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} \rightarrow 1.$$

Definition 6.6 (Konvergenz im Maß) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ und seien $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Man sagt:

$$f_k \rightarrow f \text{ nach dem Maß } \mu \text{ auf } A \subset X,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu \{x \in A; |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

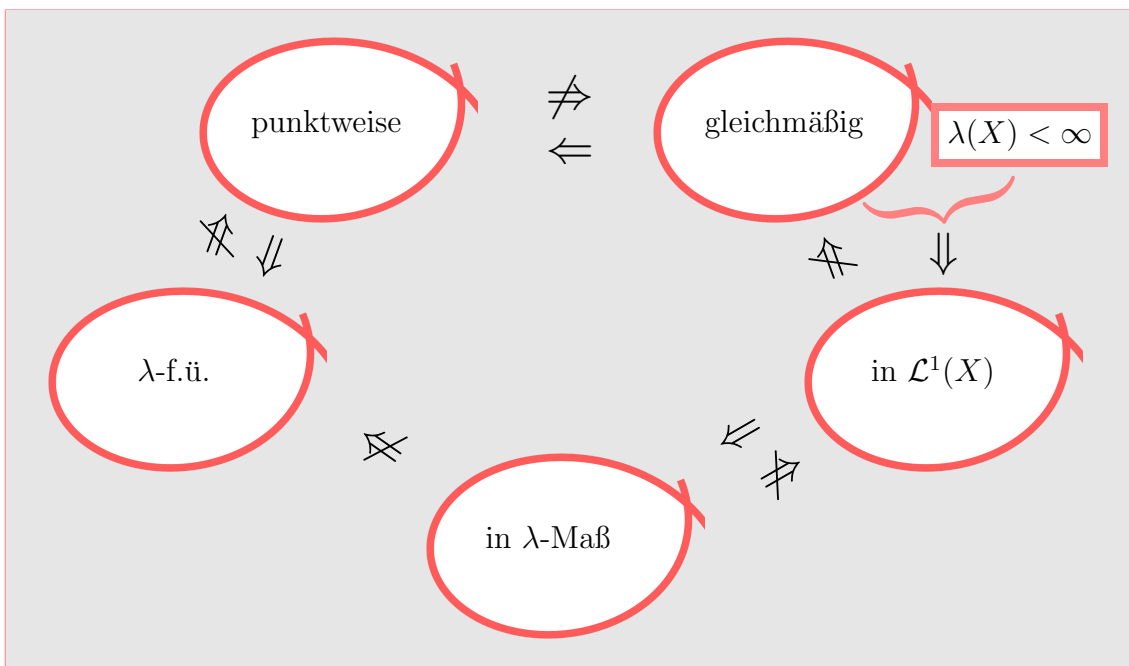
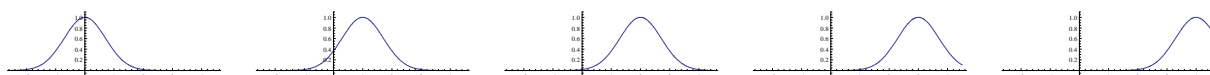


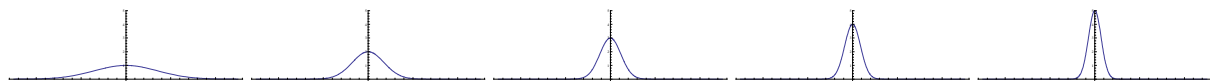
Abbildung 6.1: Zusammenhang der Konvergenzbegriffe

Diese verschiedenen Arten von Konvergenz sind nicht unabhängig. In Abbildung 6.1 findet man einige Zusammenhänge. Weiter ist es so, dass wenn $f_k \rightarrow f$ konvergiert in Typ 1 und $f_k \rightarrow g$ konvergiert in Typ 2, nicht unbedingt $f = g$ gelten muss. Wenn beide Konvergenztypen mit Hilfe des λ -Maßes definiert sind, folgt meistens nur $f = g$ λ -f.ü. Es folgen einige Beispiele zu den „ \nRightarrow “-en in dem Bild. Die Implikationen in dem Bild kann man direkt zeigen.

Beispiel 6.7 Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = e^{-|x-k|^2}$ konvergiert punktweise (nach 0), aber nicht gleichmäßig. Sie konvergiert auch nicht nach dem Maß λ .



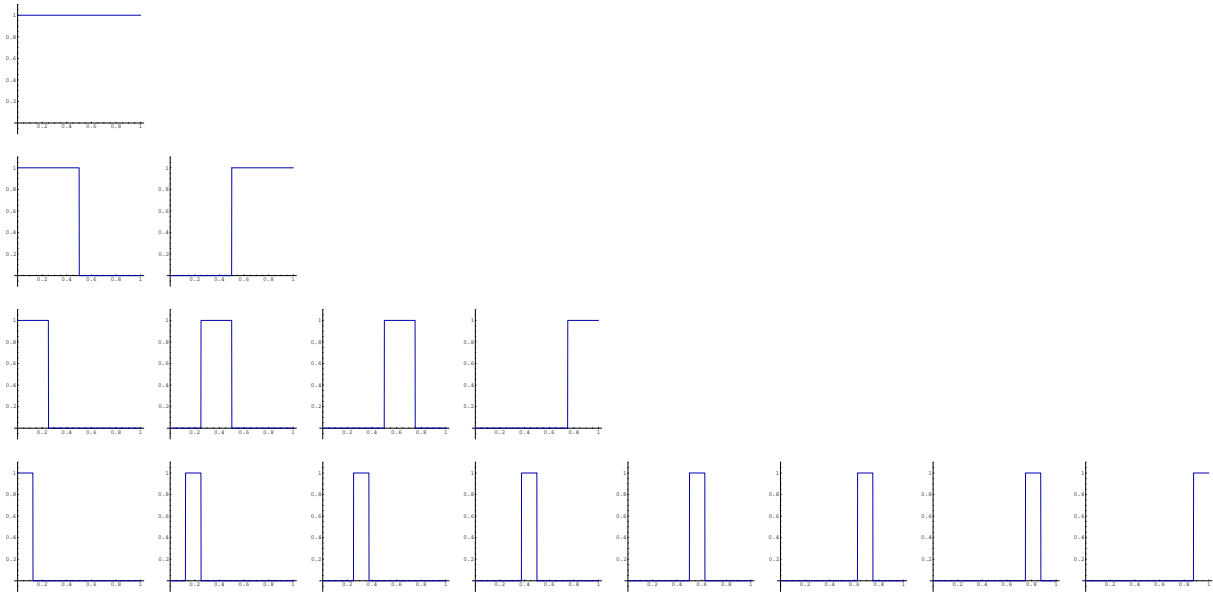
Beispiel 6.8 Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sqrt{k}e^{-kx^2}$ konvergiert λ -f.ü. und nach dem Maß λ (nach 0), aber nicht punktweise und nicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.



Beispiel 6.9 Setzen wir $g_{k,m}(x) = \mathbf{1}_{[k2^{-m}, (k+1)2^{-m}]}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^m - 1\}$. Die Funktionenfolge $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} := \{g_{0,0}, g_{0,1}, g_{1,1}, g_{0,2}, g_{1,2}, g_{2,2}, g_{3,2}, g_{0,3}, g_{1,3}, g_{2,3}, \dots\}$$

konvergiert in $\mathcal{L}^1([0, 1])$ und nach dem Maß λ (nach 0), aber nicht punktweise.



Beispiel 6.10 Die Funktionenfolge $h_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_k(x) = k f_k(x)$ und f_k , wie im letzten Beispiel, konvergiert nach dem Maß λ (nach 0), aber nicht in $\mathcal{L}^1([0, 1])$ oder λ -f.ü.

6.3 Egoroff's Konvergenzsatz

Wenn eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert auf $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda(A) < \infty$, dann folgt auch Konvergenz im Maß und in $\mathcal{L}^1(A)$. Gleichmäßige Konvergenz ist eine sehr 'starke' Konvergenz. Trotzdem ist sie nicht sehr weit von Fast-überall-Konvergenz entfernt.

Satz 6.11 (Egoroff²) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$, mit $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen mit

$$f_k \rightarrow f \quad \mu\text{-fast-überall auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine \mathcal{A} -messbare Menge $B \subset A$ derart, dass

1. $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ und
2. $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf B .

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren für $i, j \in \mathbb{N}$ die \mathcal{A} -messbare Mengen

$$C_{i,j} = \bigcup_{k \geq j} \{x \in A; |f_k(x) - f(x)| \geq 2^{-i}\}.$$

Weil $C_{i,j} \supset C_{i,j+1}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ folgt

$$\infty > \mu(A) \geq \mu(C_{i,1}) \geq \cdots \geq \mu(C_{i,j}) \geq \mu(C_{i,j+1}) \geq \cdots \geq 0.$$

Also existiert $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j})$ als Grenzwert einer fallenden beschränkten Folge. Wenn für $x \in A$ gilt, dass $f_k(x) \rightarrow f(x)$ für $k \rightarrow \infty$, dann gilt $|f_k(x) - f(x)| < 2^{-i}$ für alle $k \geq k_i$ mit k_i genügend groß, und es folgt $x \notin C_{i,j}$ für $j \geq k_i$. Weil $f_k \rightarrow f$ μ -fast-überall auf A ,

²Am Anfang des letzten Jahrhunderts wurden kyrillische Buchstaben anders "übersetzt" als heutzutage. Statt Lusin und Egoroff würde man jetzt Luzin und Egorov schreiben. Aus Gewohnheit hat man die alte Schreibweise beibehalten.

hat man $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(C_{i,j}) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $N_{i,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mu(C_{i,N_{i,\varepsilon}}) < 2^{-i-1}\varepsilon$. Wir setzen

$$B = A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N_{i,\varepsilon}}$$

und können folgern, dass

$$\mu(A \setminus B) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_{i,N_{i,\varepsilon}}\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(C_{i,N_{i,\varepsilon}}) < \varepsilon.$$

Für alle $x \in B$, $k > N_{i,\varepsilon}$ hat man $|f_k(x) - f(x)| < 2^{-i}$ und das besagt, dass $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig konvergiert auf B . ■

Korollar 6.12 Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f_k, f : A \rightarrow \mathbb{R}$, mit $k \in \mathbb{N}$, \mathcal{A} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen. Wenn

$$f_k \rightarrow f \text{ } \lambda\text{-f.ü. auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

dann gilt

$$f_k \rightarrow f \text{ im } \mu\text{-Maß auf } A \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

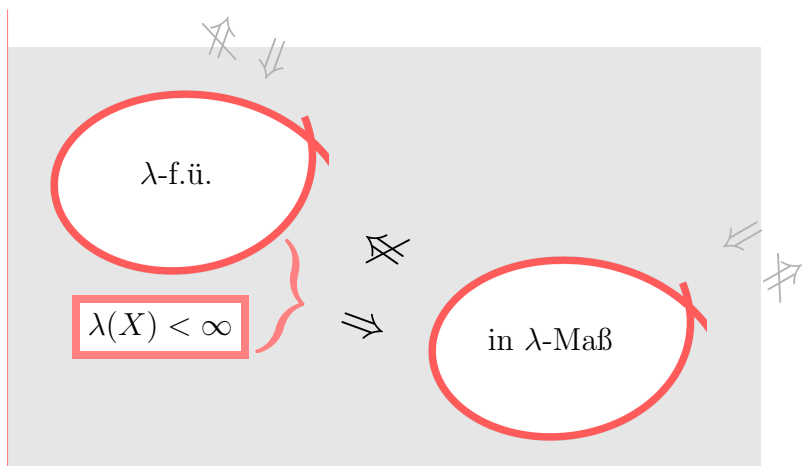


Abbildung 6.2: Eine Erweiterung von Abbildung 6.1

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden zeigen, dass es für beliebiges $\delta > 0$ ein $k_{\varepsilon,\delta} \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für $k > k_{\varepsilon,\delta}$ gilt

$$\mu\{x \in A; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} < \delta. \quad (6.1)$$

Wegen des Satzes von Egoroff gibt es $A_\delta \subset A$ mit $\lambda(A \setminus A_\delta) < \delta$ und $f_k \rightarrow f$ gleichmäßig auf A_δ . Dann gibt es also ein $k_{\delta,\varepsilon}$ derart, dass für $k > k_{\delta,\varepsilon}$ gilt

$$\sup_{x \in A_\delta} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dies bedeutet, dass für $k \geq k_{\delta,\varepsilon}$

$$\{x \in A; |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset A \setminus A_\delta,$$

und wir finden (6.1). ■

6.4 Integrale mit Werten in $[0, \infty]$

Wir haben das Lebesgue-Integral in Definition 5.2 erst für einfache positive Funktionen definiert und haben Werte in $[0, \infty]$ erlaubt. Wenn man vorzeichenwechselnde Funktionen betrachtet, dann hat man ein Problem, wenn sowohl $\int_X f^+ d\lambda = \infty$, als auch $\int_X f^- d\lambda = \infty$ gilt. Das haben wir vermieden, indem wir nur endliche Werte zugelassen haben. Für die nächsten Kapitel, wo manchmal Integrale für nicht-negative Funktionen betrachtet werden, ist es bequem, hierauf zurück zu kommen und wiederum Werte in $[0, \infty]$ zu erlauben. Das heißt, wenn $f \geq 0$ Lebesgue-messbar auf X ist und

$$\sup \left\{ \int_X g d\lambda; g : X \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ ist einfach, Lebesgue-integrierbar und } g \leq f \right\} = \infty \quad (6.2)$$

dann setzen wir

$$\int_X f d\lambda = \infty. \quad (6.3)$$

Lemma 6.13 *Für jede nicht-negative \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_X f d\lambda \in [0, \infty]$. Genauer gesagt, entweder*

1. *f ist Lebesgue-integrierbar wie in Definition 5.5 und $\int_X f d\lambda \in [0, \infty)$, oder*
2. *(6.2) gilt und man setzt $\int_X f d\lambda = \infty$.*

Bemerkung 6.13.1 *Nur im ersten Fall, also wenn $\int_X f d\lambda \in [0, \infty)$ gilt, nennt man f Lebesgue-integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten $X_k = \{x \in X; k \leq \|x\| < k+1\}$. Dann gilt $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ und $\lambda(X_k) \leq (2k+2)^n$. Wir setzen $\varepsilon_k = (2k+2)^{-n} 2^{-k-1} \varepsilon$ und

$$A_{j,k} = f^{-1} [j\varepsilon_k, (j+1)\varepsilon_k) \cap X_k$$

und definieren die einfachen Funktionen

$$g_\varepsilon = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} j\varepsilon_k \mathbf{1}_{A_{j,k}} \quad \text{und} \quad h_\varepsilon = \sum_{j,k \in \mathbb{N}} (j+1)\varepsilon_k \mathbf{1}_{A_{j,k}}.$$

Es folgt, dass

$$\int_{X_k} g_\varepsilon d\lambda \leq \int_{\underline{X_k}} f d\lambda \leq \overline{\int_{X_k} f d\lambda} \leq \int_{X_k} h_\varepsilon d\lambda \leq \int_{X_k} g_\varepsilon d\lambda + \varepsilon_k \lambda(X_k)$$

und weil wir ε_k so definiert haben, dass

$$\varepsilon_k \lambda(X_k) \leq 2^{-k-1} \varepsilon$$

folgt sogar

$$\int_X g_\varepsilon d\lambda \leq \int_{\underline{X}} f d\lambda \leq \overline{\int_X f d\lambda} \leq \int_X h_\varepsilon d\lambda \leq \int_X g_\varepsilon d\lambda + \varepsilon.$$

Also entweder $\int_X g_\varepsilon d\lambda$ und $\int_X h_\varepsilon d\lambda$ sind endlich und wir können aus Lemma 5.9 folgern, dass die erste Möglichkeit zutrifft. Wenn $\int_X g_\varepsilon d\lambda = \infty$ zutrifft, folgt die zweite Möglichkeit. ■

Analysis 3, Woche 7

Limes und Integral



7.1 Das Lemma von Fatou

Satz 7.1 (Das Lemma von Fatou) Sei $X \in \mathcal{L}$ und $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Folge \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbarer Funktionen. Dann gilt

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda. \quad (7.1)$$

Beweis. In Satz 5.12 haben wir gezeigt, dass auch $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar ist. Dann können wir $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ von unten approximieren durch einfache Funktionen $g = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i \mathbf{1}_{A_i}$, wobei $g_i \in [0, \infty)$ und A_i disjunkte \mathcal{L} -messbare Mengen in X sind:

$$g \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \quad \text{und} \quad \int_X g \, d\lambda \leq \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda.$$

Nehme $t \in (0, 1)$ und setze

$$B_{i,k} = \{x \in A_i; f_\ell(x) > tg_i \text{ für alle } \ell \geq k\}.$$

Man hat $B_{i,0} \subset B_{i,k} \subset B_{i,k+1} \subset \dots \subset A_i$ und weil $t < 1$, folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_{i,k}) = \lambda(A_i)$. Man findet, dass

$$\int_X f_k \, d\lambda \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{B_{i,k}} f_k \, d\lambda \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} tg_i \lambda(B_{i,k})$$

und auch

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in \mathbb{N}} tg_i \lambda(B_{i,k}) \geq \\ &\geq \sum_{i \in \mathbb{N}} tg_i \liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_{i,k}) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} tg_i \lambda(A_i) = t \int_X g \, d\lambda. \end{aligned}$$

Weil dies für beliebige $t \in (0, 1)$ gilt, hat man

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda \geq \int_X g \, d\lambda.$$

Wegen Lemma 6.13 kann man das Integral links in (7.1) von unten mit einfachen \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbaren Funktionen g approximieren in $[0, \infty]$. Es folgt

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\lambda = \sup_{\substack{g \leq f \\ g \text{ einf. } \mathcal{L}\text{-}\mathcal{A}_{\mathcal{T}}\text{-m.}}} \int_X g \, d\lambda \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda. \quad \blacksquare$$

Beispiel 7.2 Die Ungleichung im Lemma von Fatou ist echt, das heißt, im Allgemeinen kann man \leq nicht ersetzen durch $=$. Betrachte $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = k^2 x e^{-kx}$. Man hat $\lim_{k \rightarrow \infty} k^2 x e^{-kx} = 0$ für jedes $x \in [0, 1]$ und es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 k^2 x e^{-kx} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k y e^{-y} dy = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - (k+1) e^{-k}) \rightarrow 1,$$

$$\int_0^1 \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 x e^{-kx} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

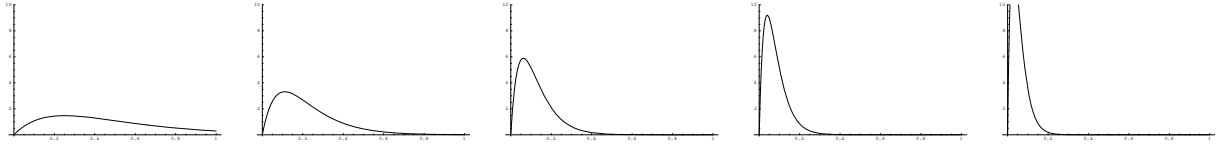


Abbildung 7.1: Einige Funktionen f_k aus dem Beispiel: $k = 4, 9, 16, 25, 36$.

7.2 Monoton oder majorisiert

Die Ungleichung in Fatous Lemma kann durch eine Gleichung ersetzt werden, wenn man weitere Bedingungen für die Funktionenfolge annimmt. Eine erste Möglichkeit betrifft Funktionenfolgen, die wachsend sind. Für solche monotonen Funktionenfolgen hat man das folgende ‘bessere’ Ergebnis.

Satz 7.3 (Monotone Konvergenz) Sei X \mathcal{L} -messbar und $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Folge \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbarer Funktionen:

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$$

Dann gilt

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda. \quad (7.2)$$

Bemerkung 7.3.1 So wie dieser Satz formuliert ist, ist er nur auf nicht-negative Funktionen direkt anwendbar. Für solche Funktionenfolgen kann man in (7.2) ein Ergebnis in $[0, \infty]$ erwarten. Für vorzeichenwechselnde Funktionen wäre es möglich, dass man den Satz auf f_k^+ und f_k^- anwenden kann und wenn man dabei nicht $\infty - \infty$ erhält, hätte man auch da das Ergebnis in (7.2).

Beweis. Weil $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ und $\{\int_X f_k d\lambda\}_{k \in \mathbb{N}}$ wachsende Folgen sind, konvergieren sie entweder zu einem Wert in \mathbb{R} oder streben nach ∞ . Auf jeden Fall ist dann \liminf gleich \lim , möglicherweise als uneigentlicher Limes ∞ . Wegen des Lemmas von Fatou gilt

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Für die andere Richtung verwendet man, dass $f_\ell \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Es folgt, dass

$$\int_X f_\ell d\lambda \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda$$

also auch

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X f_\ell d\lambda \leq \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda.$$

■

Eine zweite Möglichkeit ist die zusätzliche Bedingung, dass alle Funktionen durch eine feste Lebesgue-integrierbare Funktion majorisiert werden.

Satz 7.4 (Majorisierte Konvergenz) Sei X \mathcal{L} -messbar und $f_k : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Folge \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbarer Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine Lebesgue-integrierbare Funktion $g : X \rightarrow [0, \infty)$, also $\int_X g \, d\lambda < \infty$, die die Funktionen $|f_k|$ „majorisiert“: $|f_k| \leq g$ λ -fast-überall für alle $k \in \mathbb{N}$, und
2. $f_k \rightarrow f$ λ -fast-überall in X für $k \rightarrow \infty$.

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda. \quad (7.3)$$

Bemerkung 7.4.1 Auf Englisch heißt dieser Satz: ‘the dominated convergence theorem’. Dieser Satz ist anwendbar auf vorzeichenwechselnde Funktionen. Die Einschränkung durch eine Lebesgue-integrierbare Funktion g sorgt dafür, dass der Fall $\infty - \infty$ nicht vorkommt.

Beweis. Weil $|f_k| \leq g$ λ -fast-überall und $f_k \rightarrow f$ λ -fast-überall gilt, folgt auch $|f| \leq g$ λ -fast-überall. Also folgt aus der Dreiecksungleichung, dass

$$0 \leq 2g - |f| - |-f_k| \leq 2g - |f_k - f| \quad \lambda\text{-fast-überall.}$$

Wegen des Lemmas von Fatou hat man

$$\begin{aligned} 2 \int_X g \, d\lambda &= \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} (2g - |f_k - f|) \, d\lambda \leq \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_k - f|) \, d\lambda = 2 \int_X g \, d\lambda - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\lambda. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| \, d\lambda = 0.$$

Dann ist der Limes Superior sogar ein Limes und weil

$$\left| \int_X (f_k - f) \, d\lambda \right| \leq \int_X |f_k - f| \, d\lambda$$

gilt, folgt (7.3). ■

Als eine Folge dieser Konvergenzsätze bekommt man das folgende Ergebnis.

Korollar 7.5 Sei $f, f_k \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^1(X)$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ derart, dass $f_{k_i} \rightarrow f$ λ -fast-überall.

Beweis. Weil $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gibt es eine Teilfolge $\{f_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\|f_{k_i} - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq 2^{-i}.$$

Wir wenden Satz 7.3 an auf $g_\ell = \sum_{i=0}^{\ell} |f_{k_i} - f|$ und bekommen

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| \, d\lambda &= \int_X \lim_{\ell \rightarrow \infty} g_\ell \, d\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X g_\ell \, d\lambda = \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \int_X \sum_{i=0}^{\ell} |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\ell} \int_X |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_X |f_{k_i} - f| \, d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} \|f_{k_i} - f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq 2. \end{aligned}$$

Weil $\int_X \sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| \, d\lambda < \infty$ folgt $\sum_{i \in \mathbb{N}} |f_{k_i} - f| < \infty$ λ -fast-überall. Weil in eine konvergente Folge die Termen nach 0 konvergieren, gilt auch:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |f_{k_i} - f| = 0 \text{ } \lambda\text{-fast-überall}$$

und es folgt $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i} = f$ λ -fast-überall. ■

7.3 Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$

Die Eigenschaften des Lebesgue-Integrals zeigen, dass $\mathcal{L}^1(X)$ und auch $L^1(X)$ eine Vektorraumstruktur haben. Definiert man für $\mathbf{f} \in L^1(X)$

$$\|\mathbf{f}\|_{L^1(X)} = \int_X |f| \, d\lambda \tag{7.4}$$

mit f ein Vertreter von \mathbf{f} , dann ist dies eine Norm auf $L^1(X)$. Wir wiederholen die Bedingungen, die eine Norm erfüllen soll.

Die Funktion $p : V \rightarrow [0, \infty)$ heißt eine Norm für den Vektorraum V (eigentlich $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$) falls:

1. $p(c\mathbf{f}) = |c|p(\mathbf{f})$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{f} \in V$;
2. $p(\mathbf{f} + \mathbf{g}) \leq p(\mathbf{f}) + p(\mathbf{g})$ für alle $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in V$;
3. $p(\mathbf{f}) = 0$ für $\mathbf{f} \in V$ genau dann, wenn $\mathbf{f} = 0$.

Wenn nur die ersten zwei Bedingungen erfüllt sind, nennt man p eine **Seminorm**.

Definition 7.6 Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum und p eine Seminorm auf diesem Vektorraum. Eine Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ heißt *Cauchy-Folge* bezüglich der Seminorm p , wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für $k, \ell \geq N_\varepsilon$ gilt $p(f_k - f_\ell) < \varepsilon$.

Definition 7.7 Ein Vektorraum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ heißt **vollständig bezüglich der Seminorm** p , wenn es für jede p -Cauchy-Folge $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ mindestens eine Funktion $f \in V$ gibt so, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} p(f - f_k) = 0$.

Definition 7.8 Ein normierter Vektorraum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$, der vollständig ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, heißt **Banachraum**.

Satz 7.9 $\mathcal{L}^1(X)$ ist vollständig bezüglich der Seminorm p definiert durch $p(f) = \int_X |f| d\lambda$.

Bemerkung 7.9.1 Wenn $\mathcal{L}^1(X)$ vollständig ist bezüglich der Seminorm p , ist $L^1(X)$ vollständig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L^1(X)}$, anders gesagt: $(L^1(X), +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_{L^1(X)})$ ist ein Banachraum.



Die Theorie der Banachräume ist das zentrale Thema der Funktionalanalysis. Banachräume spielen eine sehr wichtige Rolle in den Anwendungen. Wenn man nämlich imstande ist, die Lösung eines Problems zu approximieren, das heißt, eine Cauchy-Folge von approximative Funktionen in einen passenden Banachraum zu finden, garantiert die Vollständigkeit, dass diese Folge eine Grenzfunktion im gleichen Vektorraum besitzt. Wenn man dann auch noch zeigen kann, dass die gewünschte Eigenschaft (der Lösungsbegriff) auf irgendeine Art stetig ist unter ein solches Approximationsverfahren, ist die Grenzfunktion sogar eine Lösung.

Bemerkung 7.9.2 Weil es kaum zu Irrtümern führt, schreiben wir ab hier auch $\|f\|_{\mathcal{L}^1(X)}$ für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ obwohl es keine Norm, sondern nur eine Seminorm ist.

Beweis. Sei $f_k \in \mathcal{L}^1(X)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Seminorm definiert in (7.4). Dann kann man eine streng wachsende Folge $\{k_m\}$ finden derart, dass

$$\text{für } k, \ell \geq k_m \text{ gilt } \int_X |f_k - f_\ell| d\lambda < 2^{-m}. \quad (7.5)$$

Weil

$$\int_X \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda < \sum_{m=0}^{\ell} 2^{-m} \leq 2,$$

konvergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|$ λ -fast-überall. Also ist

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \quad (7.6)$$

λ -fast-überall wohldefiniert, sage überall auf $A \subset X$ mit $\lambda(X \setminus A) = 0$ und setze $g = 0$ auf $X \setminus A$. Wegen Fatou gilt

$$\int_X g d\lambda = \int \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} \int |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| d\lambda \leq 2.$$

Wenn (7.6) auf A konvergiert, konvergiert auch $\{f_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ auf A , denn

$$f_{k_\ell} = f_{k_0} + \sum_{m=1}^{\ell} (f_{k_m} - f_{k_{m-1}}).$$

Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{\ell \rightarrow \infty} f_{k_\ell} & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist wohldefiniert und weil die f_k \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbar sind, ist auch f_∞ \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbar.

Wegen majorisierter Konvergenz, denn $|f_{k_m} - f| \leq g + |f_{k_0}|$ gilt auf A , also λ -fast-überall, und $g + |f_{k_0}|$ ist Lebesgue-integrierbar, folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_X |f_{k_m} - f| d\lambda = \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} |f_{k_m} - f| d\lambda = 0.$$

Auch gilt

$$\int_X |f_k - f| d\lambda = \int_X |f_k - f_{k_m}| d\lambda + \int_X |f_{k_m} - f| d\lambda.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Man nimmt $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ genügend groß, damit $\int_X |f_k - f_\ell| d\lambda < \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt für $k, \ell > N_\varepsilon$ und anschließend $M_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ damit $\int_X |f_{k_m} - f| d\lambda < \frac{1}{2}\varepsilon$ für $m > M_\varepsilon$ gilt. Für $k > N_\varepsilon$ folgt $\int_X |f_k - f| d\lambda < \varepsilon$. Das heißt, $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^1(X)$. ■

Definition 7.10 Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum mit (Semi)Norm $\|\cdot\|$. Eine Teilmenge $V_0 \subset V$ heißt **dicht in** V bezüglich dieser (Semi)Norm, wenn es für jedes $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ mindestens ein $v_0 \in V_0$ gibt derart, dass $\|v - v_0\| < \varepsilon$.

Bemerkung 7.10.1 \mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R} bezüglich $|\cdot|$.

Bemerkung 7.10.2 Die einfachen Lebesgue-integrierbaren Funktionen liegen dicht in $\mathcal{L}^1(X)$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(X)}$. Für diese letzte Behauptung bemerke man, dass es für jede $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$ einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen g und h gibt mit $g \leq f \leq h$ und

$$\int_X g d\lambda \leq \int_X f d\lambda \leq \int_X h d\lambda < \int_X g d\lambda + \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$\|f - g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_X |f - g| d\lambda = \int_X (f - g) d\lambda = \int_X (f - h) d\lambda + \int_X (h - g) d\lambda < \varepsilon.$$

Übrigens gilt auch $\|f - h\|_{\mathcal{L}^1(X)} < \varepsilon$.

7.4 Der Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$

Definition 7.11 Sei $p \in (1, \infty)$. Man definiert $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ für \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbare Funktionen $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Man sagt $f \in \mathcal{L}^p(X)$, wenn $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < \infty$.

Bemerkung 7.11.1 Man sagt $f \in \mathcal{L}_{lok}^p(X)$, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ gilt $\|f\|_{\mathcal{L}^p(K)} < \infty$.

Bemerkung 7.11.2 Wenn $f \in \mathcal{L}^p(X)$, dann gilt $|f|^p \in \mathcal{L}^1(X)$ und umgekehrt.

Bemerkung 7.11.3 Weil für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ gilt

$$\int_X |\alpha f|^p d\lambda \leq |\alpha|^p \int_X |f|^p d\lambda,$$

$$\int_X |f + g|^p d\lambda \leq \int_X (|f| + |g|)^p d\lambda \leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\lambda + \int_X |g|^p d\lambda \right),$$

folgt $\alpha f, f + g \in \mathcal{L}^p(X)$. Das heißt, $\mathcal{L}^p(X)$ ist ein Vektorraum.

7.5 Die Ungleichung von Hölder

Bevor wir zeigen können, dass $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ein Seminorm auf $\mathcal{L}^p(X)$ ist, brauchen wir die folgende Ungleichung.

Satz 7.12 (Die Höldersche Ungleichung) Sei $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(X)}. \quad (7.7)$$

Bemerkung 7.12.1 Wenn man die Seminormen in (7.7) explizit schreibt, hat man

$$\int_X |fg| d\lambda \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\lambda \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Der Beweis von Satz 7.12 braucht mehrere Schritte. Diese Schritte werden wir als einzelne Lemmas aufführen.

Lemma 7.13 Sei $a, b > 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis. Weil $a > 0$, darf man durch a^p dividieren und sieht man, weil $p/q = p - 1$, dass diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\frac{b}{a^{p/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \left(\frac{b}{a^{p/q}} \right)^q.$$

Setzt man $x = ba^{-p/q}$, dann reicht es, wenn wir für $x > 0$ zeigen, dass

$$x \leq 1 - \frac{1}{q} + \frac{1}{q}x^q. \quad (7.8)$$

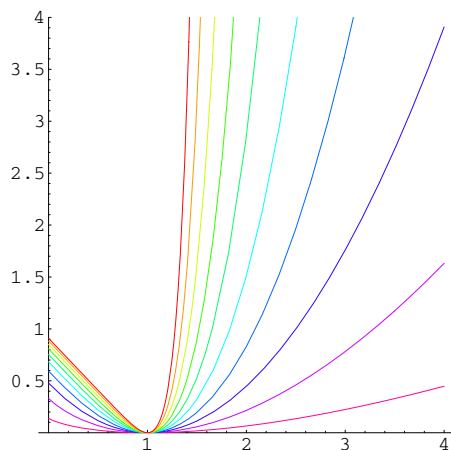
Betrachten wir $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{q}x^q - \frac{1}{q} + 1 - x.$$

Hier rechts steht ein Bild zu f bei verschiedenen q . Es gilt $f(1) = 0$ und $f'(x) = x^{q-1} - 1$. Weil $f'(x) < 0$ für $x \in (0, 1)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (1, \infty)$, hat f ein Minimum in 1 und es gilt

$$f(x) \geq f(1) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Dann ist (7.8) bewiesen und auch das Lemma. ■



Lemma 7.14 Sei $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\sum_{i=0}^m |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=0}^m |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^m |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Wir setzen $A = \left(\sum_{i=0}^m |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ und $B = \left(\sum_{i=0}^m |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ und dürfen annehmen, dass $A \neq 0$ und $B \neq 0$. Wenn nämlich $A = 0$ oder $B = 0$, stünde links und rechts zweimal 0. Aus Lemma 7.13 folgt

$$\frac{|a_i|}{A} \frac{|b_i|}{B} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_i|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_i|}{B} \right)^q = \frac{1}{p} \frac{|a_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|b_i|^q}{B^q}.$$

Summiert man für i von 0 bis m , bekommt man

$$\sum_{i=0}^m \frac{|a_i b_i|}{AB} \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=0}^m |a_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=0}^m |b_i|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Multiplizieren mit AB liefert das Ergebnis. ■

Beweis von Satz 7.12. Seien $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ und $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen so, dass $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p$ und $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q$ beide konvergieren. Dann konvergiert wegen Lemma 7.14 auch $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i|$ und es gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sei $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$ und $\varepsilon > 0$. Dann folgt $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}^1(X)$ und es gibt einfache Lebesgue-integrierbare Funktionen $f_u \leq |f|^p \leq f_o$ und $g_u \leq |g|^q \leq g_o$ mit

$$\begin{aligned} \int_X f_u \, d\lambda &\leq \int_X |f|^p \, d\lambda \leq \int_X f_o \, d\lambda < \int_X f_u \, d\lambda + \varepsilon \text{ und} \\ \int_X g_u \, d\lambda &\leq \int_X |g|^q \, d\lambda \leq \int_X g_o \, d\lambda < \int_X g_u \, d\lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$f_u^{1/p} g_u^{1/q} \leq |fg| \leq f_o^{1/p} g_o^{1/q}.$$

Durch eventuelle Verfeinerung darf man annehmen, dass es Lebesgue-messbare Mengen A_i und $c_i, d_i \in [0, \infty)$ gibt so, dass

$$f_o = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{A_i} \text{ und } g_o = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Setzen wir $a_i = (c_i \lambda(A_i))^{1/p}$ und $b_i = (d_i \lambda(A_i))^{1/q}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X f_o \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p, \\ \int_X g_o \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \text{ und} \\ \int_X f_o^{1/p} g_o^{1/q} \, d\lambda &= \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i^{1/p} d_i^{1/q} \lambda(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\int |fg| d\lambda &\leq \int_X f_o^{1/p} g_o^{1/q} d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\int_X f_o d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g_o d\lambda \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_X |f|^p d\lambda + \varepsilon \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^p d\lambda + \varepsilon \right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Weil wir $\varepsilon > 0$ beliebig wählen können, folgt das Ergebnis. ■

Analysis 3, Woche 8

Die Lebesgue-Räume



8.1 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(X)$

Für eine Lebesgue-messbare Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ und $p \in (1, \infty)$ wird $\mathcal{L}^p(X)$ definiert als die Menge aller \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbaren Funktionen $f : X \subset \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\int_X |f|^p d\lambda < \infty.$$

In Bemerkung 7.11.3 haben wir gezeigt, dass $\mathcal{L}^p(X)$ mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist. Wir wollen noch zeigen, dass $\|\cdot\|$, definiert durch $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$ eine Seminorm ist. Die erste Bedingung ist sofort erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_{\mathcal{L}^p(X)} &= \left(\int_X |\alpha f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= |\alpha| \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } f \in \mathcal{L}^p(X). \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung liefert uns die Ungleichung von Minkowski.

Satz 8.1 (Die Ungleichung von Minkowski) Sei $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ mit $p > 1$, dann gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}. \quad (8.1)$$

Beweis. In Bemerkung 7.11.3 haben wir gezeigt, dass $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ impliziert, dass $f + g \in \mathcal{L}^p(X)$. Wir dürfen also annehmen, dass $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} < \infty$. Wenn $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$, ist nichts zu beweisen, denn die rechte Seite in (8.1) ist nichtnegativ. Also nehmen wir an, dass $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \in \mathbb{R}^+$. Setzen $q = \frac{p}{p-1}$, so gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir verwenden die Höldersche Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^p &= \int_X |f + g|^p d\lambda \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\lambda + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\lambda \leq \\ &\leq \left(\left(\int_X |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\lambda\right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left(\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}\right) \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^{p-1}. \end{aligned}$$

Weil $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \in \mathbb{R}^+$ gilt, kann man dividieren durch $\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^{p-1}$ und es folgt die Ungleichung in (8.1). ■

Beispiel 8.2 Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\alpha/2}$ ist genau dann in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, falls $\alpha p > n$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wenn man $r_k = k\varepsilon$ setzt und \mathbb{R}^n radialsymmetrisch zerlegt durch

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ mit } A_k := \{x \in \mathbb{R}^n; r_k \leq \|x\| \leq r_{k+1}\},$$

findet man für $\alpha \geq 0$, weil $r \mapsto (1 + r^2)^{-\alpha/2}$ fallend ist auf $[0, \infty)$, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \int_{A_k} |f|^p d\lambda \begin{cases} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f(r_k)|^p \lambda(A_k), \\ \geq \sum_{k=0}^{\infty} |f(r_{k+1})|^p \lambda(A_k). \end{cases}$$

Wegen des Mittelwertsatzes gilt

$$\frac{(r_{k+1})^n - (r_k)^n}{r_{k+1} - r_k} = n(r_k + \mathcal{O}(\varepsilon))^{n-1}$$

und

$$\lambda(A_k) = \sigma_n((r_{k+1})^n - (r_k)^n) = n\sigma_n(r_k + \mathcal{O}(\varepsilon))^{n-1}(r_{k+1} - r_k)$$

wobei σ_n das Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist. Wenn man $\varepsilon \downarrow 0$ nimmt, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda = \int_0^{\infty} |f(r)|^p n\sigma_n r^{n-1} dr = n\sigma_n \int_{r=0}^{\infty} (1 + r^2)^{-\alpha p/2} r^{n-1} dr.$$

Dieses Integral ist kleiner ∞ genau dann, wenn $-\alpha p + n - 1 < -1$.

Beispiel 8.3 Wenn man nicht am genauen Wert des Integrals interessiert ist, sondern nur an 'beschränkt' ($< \infty$) oder 'unbeschränkt' ($= \infty$), dann kann man oft auch eine gröbere einseitige Abschätzung zeigen. Zum Beispiel gilt für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = (1 + |x|)^{-4}$, dass $f \in \mathcal{L}^2(X)$. Wir können $|f|^2$ abschätzen durch die einfache Funktion $g = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \mathbf{1}_{B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 d\lambda &\leq \int \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \mathbf{1}_{B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)} d\lambda = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \lambda(B_{n+1}(0) \setminus B_n(0)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{-8} \sigma_3((n+1)^3 - n^3) = \\ &= \sigma_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n+1)^8} \leq 3\sigma_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^6} < \infty. \end{aligned}$$

Satz 8.4 $\mathcal{L}^p(X)$ ist ein vollständiger Vektorraum bezüglich der $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ -Seminorm.

Beweis. Sei $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p(X)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ -Seminorm. Wie im Beweis der Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X)$ nimmt man k_m derart, dass

$$\|f_k - f_\ell\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2^{-m} \text{ für } k, \ell > k_m.$$

Dann ist $g := \sum_{m=0}^{\infty} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}|$ \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und weil man

$$\left\| \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \sum_{m=0}^{\ell} \|f_{k_{m+1}} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2$$

hat, gilt wegen Fatou, dass

$$\|g\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left\| \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\| \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq 2.$$

Außerdem konvergiert $\left\{ \sum_{m=0}^{\ell} |f_{k_{m+1}} - f_{k_m}| \right\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ absolut λ -fast-überall, sagen wir auf A , und ist auf die gleiche Menge A auch $f_{\infty} = f_{k_0} + \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\ell} (f_{k_{m+1}} - f_{k_m})$ wohldefiniert. Auf die Nullmenge $X \setminus A$ setzt man $f_{\infty}(x) = 0$. Mit Hilfe der majorierten Konvergenz folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{\infty} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} (f_{\infty} - f_{k_m}) \right\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$$

und schlussendlich

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_{\infty} - f_m\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\|f_{\infty} - f_{k_m}\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|f_{k_m} - f_m\|_{\mathcal{L}^p(X)} \right) = 0.$$

■

8.2 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^\infty(X)$

Definition 8.5 Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktion. Man definiert für \mathcal{L} -messbare $A \subset X$ das λ -wesentliche Supremum¹ auf A durch

$$\text{ess-sup}_A f = \inf \{ t \in \mathbb{R}; \lambda(\{x \in A; f(x) > t\}) = 0 \}.$$

Ähnlich kann man auch das λ -wesentliche Infimum auf A definieren.

Bemerkung 8.5.1 Für das λ -wesentliche Supremum gilt:

$$\text{ess-sup}_A f = \inf_{\substack{N \subset A \\ \lambda(N)=0}} \left(\sup_{A \setminus N} f \right).$$

Es folgt, dass $\text{ess-sup}_A f \leq \sup_A f$.

Definition 8.6 Man definiert $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ für \mathcal{L} - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare Funktionen $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} = \text{ess-sup}_X |f|.$$

Man sagt $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$, wenn $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} < \infty$.

Beispiel 8.7 Für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

gilt

$$\text{ess-sup}_{\mathbb{R}} f = 0 \quad \text{und} \quad \text{ess-sup}_{\mathbb{R}} g = \infty.$$

¹In Englisch: *essential supremum*.

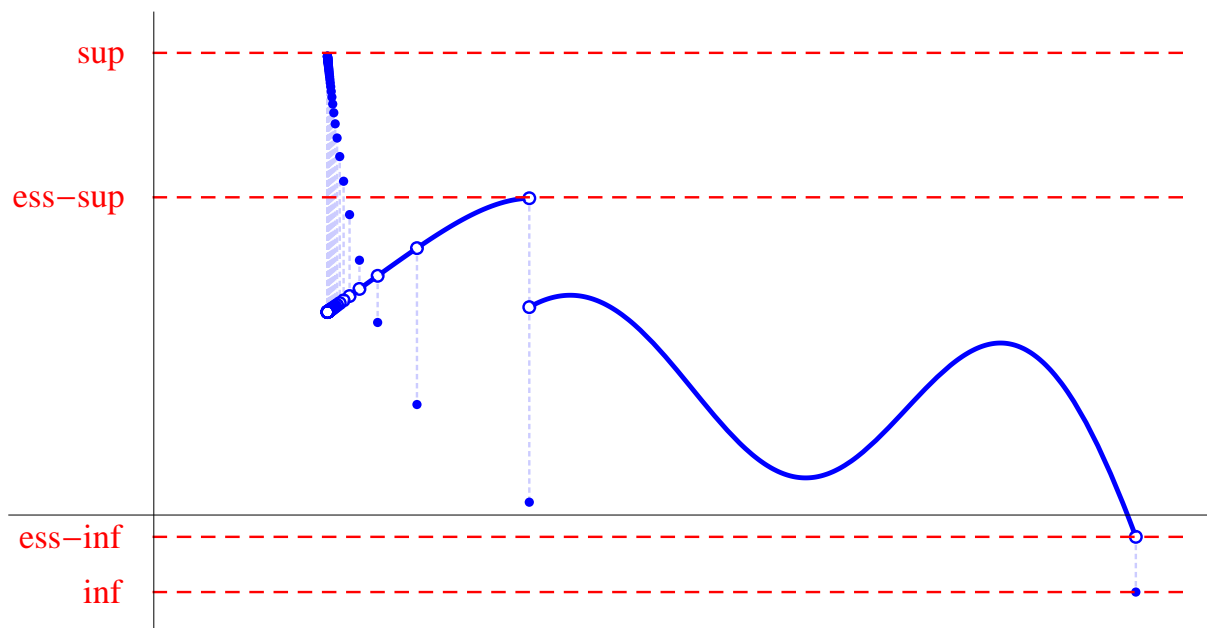


Abbildung 8.1: Das Supremum und das wesentliche Supremum können verschieden sein.

Lemma 8.8 Für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}. \tag{8.2}$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ gilt

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}. \tag{8.3}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $M_{g,\varepsilon} = \text{ess-sup}_X |g| + \varepsilon$. Setze $B_{g,\varepsilon} = \{x \in X; |g(x)| > M_{g,\varepsilon}\}$. Dann gilt $\lambda(B) = 0$ und

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_X |fg| d\lambda = \int_{X \setminus B_{g,\varepsilon}} |fg| d\lambda \leq M_{g,\varepsilon} \int_{X \setminus B_{g,\varepsilon}} |f| d\lambda = \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} (\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \varepsilon).$$

Weil diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (8.2).

Bei der zweiten Ungleichung soll man bemerken, dass für $x \in X \setminus (B_{f,\varepsilon} \cup B_{g,\varepsilon})$ gilt, dass

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_{f,\varepsilon} + M_{g,\varepsilon} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + 2\varepsilon.$$

Weil $\lambda(B_{f,\varepsilon} \cup B_{g,\varepsilon}) \leq \lambda(B_{f,\varepsilon}) + \lambda(B_{g,\varepsilon}) = 0$ hat man

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + 2\varepsilon.$$

Weil diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt (8.3). ■

Die Ungleichung in (8.3) zeigt die zweite Bedingung einer Seminorm. Die erste ist sofort erfüllt und man bekommt:

Lemma 8.9 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^\infty(X)$.

Auch hier kann man den Vektorraum $L^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X) / \sim$ definieren. Definiert man die Norm $\|\cdot\|_{L^\infty(X)}$ wie folgt:

$$\|\mathbf{f}\|_{L^\infty(X)} := \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \text{ für } f \in \mathcal{L}^\infty(X) \text{ einen Vertreter von } \mathbf{f} \in L^\infty(X),$$

dann ist $(L^\infty(X), \|\cdot\|_{L^\infty(X)})$ nicht nur ein normierter Vektorraum sondern sogar ein Banachraum.

8.3 Der Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^2(X)$

Wir wiederholen die Eigenschaften eines inneren Produktes.

Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ für alle $v, w \in V$;
2. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ und $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

Aus 1 und 2 folgt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **bilinear**² ist.

Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein inneres Produkt ist, dann ist $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad (8.4)$$

eine Norm.

Definition 8.10 Wenn der Vektorraum $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat und vollständig ist bezüglich der vom inneren Produkt definierten Norm, nennt man ihn **Hilbertraum**.

Lemma 8.11 Für $(\mathcal{L}^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$ erfüllt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definiert durch

$$\langle u, v \rangle = \int_X uv \, d\lambda \quad (8.5)$$

die ersten beide Bedingungen eines inneren Produktes. Außerdem gilt $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$.

Bemerkung 8.11.1 Weil $(L^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$ vollständig ist bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(X)}$ und man durch (8.4-8.5) ein zugehörendes inneres Produkt hat, und die letzte Eigenschaft nun auch erfüllt ist, ist $(L^2(X), +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Hilbertraum.

Beweis. Die Bedingungen für ein inneres Produkt folgen aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. ■

8.4 Stetige lineare Abbildungen

Definition 8.12 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierten Vektorräume. Man schreibt

$$L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$$

für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $T : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$.

Wir wiederholen nochmals, dass eine Abbildung T linear ist, wenn

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \text{ für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ und } f, g \in V$$

und dass T stetig ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|f - g\| < \delta_\varepsilon \implies \|T(f) - T(g)\| < \varepsilon.$$

²Das Funktional $F : U \times V \rightarrow W$ heißt bilinear, wenn $u \mapsto F(u, v)$ linear ist für alle $v \in V$ und $v \mapsto F(u, v)$ linear ist für alle $u \in U$.

Lemma 8.13 Seien $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_V)$ und $(W, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

1. T ist stetig in 0;
2. T ist stetig auf V ;
3. T ist beschränkt als lineares Funktional³:
es gibt $M_T \in [0, \infty)$ mit $\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_V$ für alle $v \in V$;
4. $\sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} < \infty$;
5. $\sup \{ \|T(v)\|_W; \|v\|_V = 1 \} < \infty$.

Beweis. (1. \Rightarrow 2.) Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ derart, dass aus die Ungleichung $\|v - 0\|_V < \delta$ folgt, dass $\|T(v) - T(0)\|_W < \varepsilon$. Dann gilt für $\|v_1 - v_2\|_V < \delta$, dass

$$\|T(v_1) - T(v_2)\|_W = \|T(v_1 - v_2)\|_W < \varepsilon.$$

(2. \Rightarrow 3.) Es gibt $\delta > 0$ derart, dass für $\|v\|_V < \delta$ gilt $\|T(v)\|_W < 1$. Setze $M_T = \delta^{-1}$ und es folgt für $\|v\|_V \neq 0$

$$\|T(v)\|_W = \left\| \delta^{-1} \|v\|_V T\left(\frac{v}{\|v\|_V} \delta\right) \right\|_W = \delta^{-1} \|v\|_V \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V} \delta\right) \right\|_W \leq \delta^{-1} \|v\|_V.$$

Für $\|v\|_V = 0$ gilt $T(v) = 0$ und die Ungleichung ist auch erfüllt.

(3. \Rightarrow 4.) Weil $\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_V$ gilt, folgt $\sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq M_T$.

(4. \Rightarrow 5.) Das Ergebnis folgt aus

$$\frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V} = \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W.$$

(5. \Rightarrow 1.) Setze $M = \sup \{ \|T(v)\|_W; \|v\|_V = 1 \}$. Man sieht fast sofort, dass man für $\varepsilon > 0$ die folgende δ nehmen kann:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M + 1}.$$

Denn für $\|v\|_V < \delta$ (und $\|v\|_V \neq 0$) gilt

$$\|T(v)\|_W = \|v\|_V \left\| T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right) \right\|_W \leq \|v\|_V M \leq \frac{\varepsilon}{M + 1} M < \varepsilon.$$

Der Kreis ist geschlossen. ■

Lemma 8.13 sagt aus, dass „stetig und linear“ gleich „beschränkt linear“. Die kleinste obere Schranke M_T , für die gilt, dass

$$\|T(v)\|_W \leq M_T \|v\|_W \quad \text{für alle } v \in V, \tag{8.6}$$

kann man als Norm für T verwenden.

³Man nennt eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, wenn es $M \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $|f(v)| \leq M$ für alle $v \in V$.

Man nennt ein lineares Funktional $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, mit $(V, \|\cdot\|_V)$ einem Vektorraum, wenn es $M \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $|f(v)| \leq M \|v\|_V$ für alle $v \in V$.

Lemma 8.14 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume. Dann wird

$$(L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W)), \|\cdot\|)$$

mit

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \quad (8.7)$$

ein normierter Vektorraum.

Beweis. Für jedes $T \in L((V, \|\cdot\|_V); (W, \|\cdot\|_W))$ gibt es ein $M_T \in \mathbb{R}^+$ derart, dass (8.6) erfüllt ist. Dann ist das Supremum in (8.7) wohldefiniert. Man zeigt sofort, dass $\|\cdot\|$ die Eigenschaften einer Norm erfüllt:

1. $\|cT\| = \sup \left\{ \frac{\|cT(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = \sup \left\{ \frac{|c|\|T(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = |c| \|T\|;$
2. Aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_W$ und einer Eigenschaft des Supremums folgt:

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup \left\{ \frac{\|T_1(v) + T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|T_1(v)\|_W + \|T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \frac{\|T_1(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} + \sup \left\{ \frac{\|T_2(v)\|_W}{\|v\|_V}; v \in V \setminus \{0\} \right\} = \|T_1\| + \|T_2\|. \end{aligned}$$

3. Und $\|T\| = 0$ impliziert, dass $\|T(v)\|_W = 0$ für alle v und dann auch, dass $Tv = 0$ für alle v . Das heißt, T ist das 0-Funktional. ■

Beispiel 8.15 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $0 \in K$. Für $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ mit

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)|; x \in K \},$$

ist das Funktional $T : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Tf = f(0),$$

eine stetige lineare Abbildung:

- linear: $T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha T(f) + \beta T(g)$.
- stetig: $|T(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$.

Beispiel 8.16 Obwohl $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})})$ kein normierter Vektorraum ist, denn $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}$ ist ja nur ein Seminorm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, kann man schauen, ob $T : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Tf = f(0),$$

beschränkt ist bezüglich den Seminorm. Das ist nicht so. Man betrachte $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und $g = f + \mathbf{1}_{\{0\}}$. Dann gilt $|T(f) - T(g)| = 1$ und $\|f - g\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} = 0$.

Ein Funktional wie T kann man nicht auf $L^1(\mathbb{R})$ definieren. Die Funktionen f und g vertreten das gleiche Element in $L^1(\mathbb{R})$ und $Tf \neq Tg$.

Beispiel 8.17 Das Funktional $T : \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda,$$

ist auch $L^1(\mathbb{R})$ zu definieren, denn wenn $f = g$ λ -f.ü. gilt, folgt $Tf = Tg$. Nennen wir \mathbf{T} das zugehörige Funktional auf $L^1(\mathbb{R})$, dann gilt

$$|\mathbf{T}(\mathbf{f})| = \left| \int_{\mathbb{R}} f \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| \mathbf{1}_{[0,1]} d\lambda = \int_{[0,1]} |f| d\lambda \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})} = \|\mathbf{f}\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

und sehen wir, dass \mathbf{T} beschränkt und deshalb auch stetig ist.

Beispiel 8.18 Betrachten wir die stetige Funktionen auf $[0, 1]$ mit $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,1])}$ als Norm. $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1([0,1])})$ ist ein normierter Vektorraum. Weil $C[0, 1] \subset \mathcal{L}^1([0, 1])$ gilt, reicht es wenn wir zeigen können, dass $\|f\|_{\mathcal{L}^1([0,1])} = 0$ impliziert $f = 0$. Für stetige Funktionen gilt dies.

Bei dieser Norm ist die Abbildung $T : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$Tf = f(0)$$

immer noch linear, aber keine stetige Abbildung.

8.5 Der Darstellungssatz von Riesz

Für einen normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_V)$ definiert man den Dualraum V' als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $T : V \rightarrow \mathbb{R}$, oder anders gesagt:

$$V' = L((V, \|\cdot\|_V); (\mathbb{R}, |\cdot|)). \quad (8.8)$$

Korollar 8.19 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Dann ist $\|\cdot\|_{V'}$, definiert durch

$$\|T\|_{V'} = \sup \{|T(v)|; \|v\|_V = 1\} \quad (8.9)$$

eine Norm auf V' .

Beweis. Dieses Ergebnis folgt wegen (8.8) aus den letzten Lemmas. ■

Satz 8.20 (Der Darstellungssatz von Frigyes Riesz) Sei $p \in [1, \infty)$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ falls $p \in (1, \infty)$ und $q = \infty$ falls $p = 1$. Dann gilt folgendes:

1. Für jede $g \in L^q(X)$ gehört $T_g : L^p(X) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$T_g(f) = \int_X gf d\lambda \quad (8.10)$$

zu $(L^p(X))'$.

2. Für jede $T \in (L^p(X))'$ gibt es $g \in L^q(X)$ mit $T(f) = \int_X gf d\lambda$.

Beweis. Die erste Aussage ist ein direktes Korollar der Hölder-Ungleichung und Lemma 8.13. Ein Beweis der zweiten Aussage wird es möglicherweise bei der Funktionalanalysis geben. Man kann sich auch Paragraphen 36 von "Functional Analysis" durch Frigyes Riesz und Béla Sz.-Nagy anschauen. ■

Dieser Satz besagt, dass für $p \in [1, \infty)$ und q wie oben gilt

$$\left((L^p(X))', \|\cdot\|_{(L^p(X))'} \right) \simeq \left(L^q(X), \|\cdot\|_{L^q(X)} \right).$$

Das Symbol \simeq bezeichnet 'ist isomorph zu'. **Isomorph** für normierte Vektorräume bedeutet, dass es eine bijektive Abbildung gibt, die die Vektorraumstruktur erhält und die Normen vergleichen lässt.

- Die bijektive Abbildung ist hier $g \mapsto T_g : L^q(X) \rightarrow (L^p(X))'$ mit T_g definiert in (8.10).
- Die Vektorraumstruktur bleibt erhalten, weil

$$T_{\alpha f + \beta g} = \alpha T_f + \beta T_g \text{ für alle } f, g \in L^q(X) \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Die Normen lassen sich vergleichen, weil es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass

$$c_1 \|f\|_{L^q(X)} \leq \|T_f\|_{(L^p(X))'} \leq c_2 \|f\|_{L^q(X)} \text{ für alle } f \in L^q(X).$$

Man findet sogar folgendes.

Lemma 8.21 Für alle $g \in L^q(X)$ gilt

$$\|T_g\|_{(L^p(X))'} = \|g\|_{L^q(X)} \quad (8.11)$$

Bemerkung 8.21.1 Wenn für eine Isomorphie $\mathcal{I} : (V, \|\cdot\|_V) \rightarrow (W, \|\cdot\|_W)$ gilt, dass

$$\|\mathcal{I}(f)\|_W = \|f\|_V,$$

dann nennt man \mathcal{I} eine **isometrische Isomorphie**.

Beweis. Für $p \in (1, \infty)$ zeigt man \leq in (8.11) wie folgt:

$$\begin{aligned} \|T_g\|_{(L^p(X))'} &= \sup \left\{ |T_g(v)|; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left| \int gv \, d\lambda \right|; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \int |gv| \, d\lambda; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \leq \\ &\leq \sup \left\{ \|g\|_{L^q(X)} \|v\|_{L^p(X)}; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} = \|g\|_{L^q(X)}. \end{aligned}$$

Um \geq in (8.11) zu zeigen, betrachtet man

$$v_g = |g|^{q/p} \text{sign}(g).$$

Es gilt $v_g \in L^p(X)$ und

$$\|v_g\|_{L^p(X)} = \|g\|_{L^q(X)}^{q/p}.$$

Angenommen $\|g\|_{L^q(X)} \neq 0$, so betrachtet man

$$\tilde{v}_g = \frac{v_g}{\|v_g\|_{L^p(X)}}.$$

Man findet $\|\tilde{v}_g\|_{L^p(X)} = 1$ und es folgt, weil $1 + q/p = p$ und $q - q/p = 1$, dass

$$\begin{aligned} \|T_g\|_{(L^p(X))'} &= \sup \left\{ |T_g(v)| ; \|v\|_{L^p(X)} = 1 \right\} \geq \\ &\geq |T_g(\tilde{v}_g)| = \left| \int g \tilde{v}_g \, d\lambda \right| = \frac{1}{\|v_g\|_{L^p(X)}} \left| \int g v_g \, d\lambda \right| = \\ &= \frac{1}{\|v_g\|_{L^p(X)}} \left| \int g |g|^{q/p} \operatorname{sign}(g) \, d\lambda \right| = \frac{1}{\|g\|_{L^q(X)}^{q/p}} \int |g| |g|^{q/p} \, d\lambda = \\ &= \frac{1}{\|g\|_{L^q(X)}^{q/p}} \|g\|_{L^q(X)}^q = \|g\|_{L^q(X)}. \end{aligned}$$

Im Fall $g = 0$ folgt das Ergebnis sofort.

Man soll sich überlegen, was sich ändert falls $p = 1$ und $q = \infty$. ■

Haben Sie übrigens bemerkt, dass wir im Beweis des letzten Satzes mit Lebesgue-Klassen gerechnet haben als wären es Funktionen?

Analysis 3, Woche 9

Berechnen der Integrale



9.1 Einleitung

Um ein Integral explizit berechnen zu können, greift man fast immer auf ein Ergebnis zurück: den Hauptsatz der Integralrechnung. Er stellt die Verbindung her zwischen Integration und Stammfunktion. Wenn $F' = f$ auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$, dann gilt

$$\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a).$$

Beim Riemann-Integral haben wir schon gesehen, dass sich ein n -dimensionales Integral umformen lässt zu einem n -fachen **eindimensionalen** Integral:

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)dx_n \dots dx_1.$$

Für diese eindimensionalen Integrale kann es möglich sein, den oben genannten Satz zu verwenden und so einen expliziten Wert zu bekommen. Es sollte einem aber bewusst sein, dass nur die wenigsten Integrale explizit zu lösen sind. Das bedeutet, dass man sich meistens beschränkt auf einen Beweis der Beschränktheit und vielleicht sogar versucht, eine Abschätzung für die Größe zu finden.

Manchmal ist es hilfreich die Symmetrie des Gebietes zu benutzen und Pol- oder Kugelkoordinaten zu verwenden. In diesem Fall braucht man auch noch einen Transformationssatz. Die drei Hauptbestandteile für das Berechnen eines Integrals kann man so wie folgt zusammenfassen:

- Der Hauptsatz der (**eindimensionalen**) Integralrechnung.
- Der Satz von Fubini-Tonelli, um mehrdimensionale Integrale auf mehrfache eindimensionale Integrale zurückzuführen.
- Der Transformationssatz, um Integrationsgebiet und Funktion besser passend zu gestalten.

Beispiel 9.1 Sei $f_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (1 + \|x\|^2)^{-\alpha}$. Wir wollen uns die folgende Frage anschauen:

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$?

Indem man f approximiert mit kreisförmig definierten einfachen Funktionen,

$$(1 + (\varepsilon [\|x\| / \varepsilon + 1])^2)^{-\alpha} \leq f(x) \leq (1 + (\varepsilon [\|x\| / \varepsilon])^2)^{-\alpha},$$

kann man sich davon überzeugen, dass die Frage umformuliert werden kann zu:

Wann ist $\int_0^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$ endlich?

Übrigens ist $[\cdot]$ wiederum die Ganzzahlfunktion und der Faktor r^{n-1} taucht auf durch die Skalierung:

$$\text{Vol}(B_{r+\varepsilon}(0) \setminus B_r(0)) = \sigma_n ((r + \varepsilon)^n - r^n) = \sigma_n \varepsilon r^{n-1} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).$$

Statt dieses Integral genau zu berechnen, verwenden wir eine der Abschätzungen

$$2^{-p\alpha} r^{-2p\alpha+n-1} \leq (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} \leq r^{-2p\alpha+n-1} \text{ für } r \geq 1.$$

Weil $\int_0^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$ endlich ist genau dann, wenn $\int_1^\infty (1 + r^2)^{-p\alpha} r^{n-1} dr$ endlich ist, bleibt noch herauszufinden, wann

$$\int_1^\infty r^{-2p\alpha+n-1} dr$$

endlich ist. Hier lässt sich jetzt der Hauptsatz verwenden:

$$\int_1^M r^{-2p\alpha+n-1} dr = \begin{cases} \frac{1}{-2\alpha+n} (M^{-2p\alpha+n} - 1) & \text{falls } n \neq 2p\alpha, \\ \log(M) & \text{falls } n = 2p\alpha. \end{cases}$$

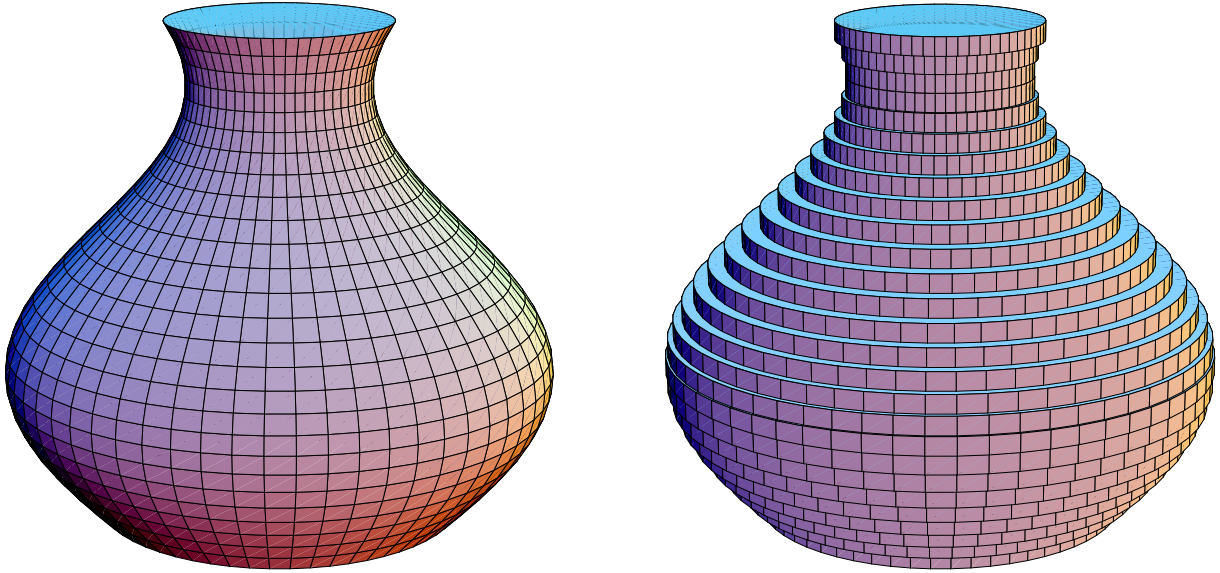
Man sieht, dass man für $M \rightarrow \infty$ nur einen endlichen Wert bekommt, wenn $2p\alpha > n$. Die Antwort auf die Frage lautet also: für $\alpha > \frac{n}{2p}$.

Übrigens war Cavalieri¹ einer der ersten, der Volumen berechnete, indem er die Flächeninhalte von infinitesimal dünnen Scheiben addierte. Diese Prozedur ist bekannt als das Cavalierische Prinzip.

9.2 Fubini und Tonelli

Wir haben bei der Riemann-Integration die technischen Schwierigkeiten gesehen, die man bekommt, wenn man den Satz von Fubini-Tonelli anwenden möchte auf ein nicht rechteckiges Gebiet. Beim Lebesgue-Integral von $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Lebesgue-messbaren Menge X kann man ohne weiteres f auf $\mathbb{R}^n \setminus X$ erweitern durch 0. Man braucht sich keine Sorgen zu machen, ob eine mögliche Unstetigkeit am Rande Probleme macht, denn das Lebesgue-Integral braucht keine Stetigkeit. Wir können uns also beschränken auf eine Formulierung der Sätze von Fubini und Tonelli auf ganz \mathbb{R}^n .

¹Bonaventura Francesco Cavalieri, italienischer Mathematiker, lebte von 1598 bis 1647.



Abbildungung 9.1: Der Ansatz von Cavalieri: mit Scheiben zum Volumen.

Satz 9.2 (Tonelli) Für eine $\mathcal{L}_{(n+m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbare² Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow [0, \infty]$ gilt:

1. $x \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ist $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für $\lambda_{(m)}$ -fast alle $y \in \mathbb{R}^m$ und
 $y \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ ist $\mathcal{L}_{(m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar für $\lambda_{(n)}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $y \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty]$ ist $\mathcal{L}_{(m)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar und
 $x \mapsto \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ist $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar;

3. und

$$\begin{aligned} & \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d\lambda_{(n+m)} = \\ & = \int_{y \in \mathbb{R}^m} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} \right) d\lambda_{(m)} = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} \right) d\lambda_{(n)}. \end{aligned}$$

Satz 9.3 (Fubini) Für eine $\mathcal{L}_{(n+m)}$ -integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

1. $x \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}_{(n)}$ -integrierbar für $\lambda_{(m)}$ -fast alle $y \in \mathbb{R}^m$ und
 $y \mapsto f(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}_{(m)}$ -integrierbar für $\lambda_{(n)}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $y \mapsto \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}_{(m)}$ -integrierbar und
 $x \mapsto \int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}_{(n)}$ -integrierbar;

3. und

$$\begin{aligned} & \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}} f(x, y) d\lambda_{(n+m)} = \\ & = \int_{y \in \mathbb{R}^m} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_{(n)} \right) d\lambda_{(m)} = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_{(m)} \right) d\lambda_{(n)}. \end{aligned}$$

Ein erster Schritt zum Beweis von Tonelli als auch von Fubini ist der folgende Satz:

²Wir haben $\mathcal{L}_{(k)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar definiert für Funktionen von $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$. Hier muss man diese Definition erweitern für Funktionen die ∞ werden können. Dazu erweitert man die Basis für \mathcal{T} der offenen Intervalle $\{(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ mit $\{(t, \infty)\}_{t \in \mathbb{R}}$ als offene Umgebungen von ∞ .

Der Index in $\mathcal{L}_{(k)}$ und $\lambda_{(k)}$ ist angebracht um deutlich zu machen, dass es Lebesgue-Messbarkeit und Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^k betrifft.



Abbildung 9.2: Cavalieri, Tonelli, Fubini und Murphy hatten Schnäuzer und mit Integration zu tun.

Satz 9.4 Für jede Menge $A \in \mathcal{L}_{(n+m)}$ gilt:

1. $A_x := \{y \in \mathbb{R}^m; (x, y) \in A\} \in \mathcal{L}_{(m)}$ für $\lambda_{(n)}$ -fast alle $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $x \mapsto \lambda_{(m)}(A_x)$ ist $\mathcal{L}_{(n)}$ - $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ -messbar;
3. $\lambda_{(m+n)}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_{(m)}(A_x) d\lambda_{(n)}$.

Bemerkung 9.4.1 Dieser Satz ist eine Erweiterung des Cavalierischen Prinzips.

Der zweite Schritt besteht aus der Anwendung des letzten Satzes auf elementare Funktionen, um so das Ergebnis von Fubini und Tonelli für elementare Funktionen zu bekommen.

Der letzte Schritt verwendet die Limesätze (Fatou und Folgen) um zu zeigen, dass man auch allgemeinere Funktionen zulassen kann.

9.3 Transformationen

Beim Riemann-Integral hat man schon, sowohl Polar- und Zylinderkoordinaten als auch allgemeine Koordinatensysteme verwendet, um bestimmte Integrale explizit berechnen zu können. Einzelne Stellen, an denen die auftauchenden Transformationen singulär werden, hat man lokal mit einem Limesverfahren bewältigen können. Wir werden sehen, dass sich auch da das Lebesgue-Integral großzügiger verhält. Wir werden die Beweise nur in groben Zügen erklären.

Die ersten Schritte sind ähnlich wie beim Riemann-Integral:

Schritt 1. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Dann gilt

$$\text{Vol}(A(R)) = |\det A| \text{Vol}(R).$$

In zwei Dimensionen gilt für den Flächeninhalt I_P des Parallelogramms P mit den Ecken $(0, 0)$, (a_1, a_2) , $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und (b_1, b_2) :

$$I_P = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|.$$

In drei Dimensionen gilt für das Volumen V_P des Parallelepipeds, aufgespannt durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

dass

$$V_P = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|.$$

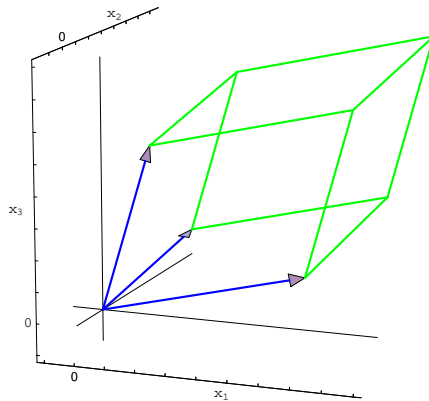


Abbildung 9.3: Das Volumen vom Parallelepipeds kann man mit einer Determinante berechnen.

Schritt 2. Sei $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $A(\Omega) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und falls $\lambda(\Omega) < \infty$ gilt

$$\lambda(A(\Omega)) = |\det A| \lambda(\Omega).$$

Schritt 3. Als nächstes ersetzen wir invertierbare lineare Abbildungen durch Diffeomorphismen. Wir erinnern uns an die Definition:

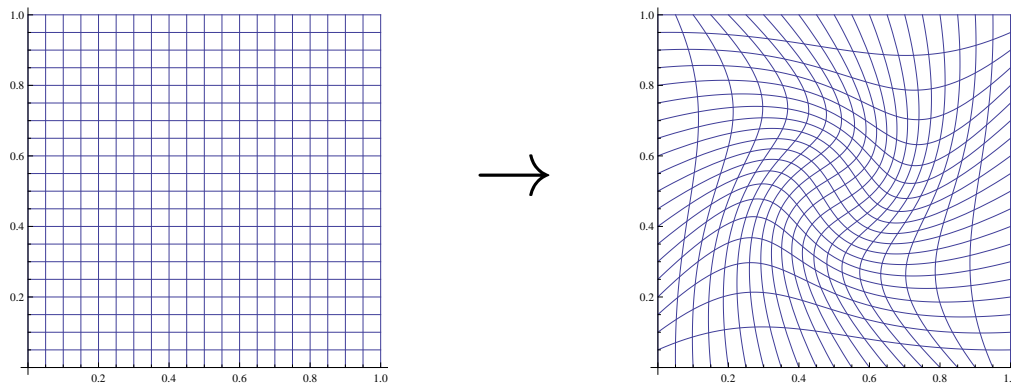
Definition 9.5 Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine bijektive Abbildung $\Phi : X \rightarrow Y$ mit Φ und Φ^{inv} C^1 -Abbildungen (differenzierbar mit stetiger Ableitung), nennt man ein **Diffeomorphismus** von X auf Y .

Für einen solchen Diffeomorphismus finden wir, dass der $n \times n$ -Matrix

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und dass

$$(\Phi^{inv})'(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1}_{x=\Phi^{inv}(y)}.$$

Abbildung 9.4: Darstellung eines Diffeomorphismus von $(0, 1)^2$ zu $(0, 1)^2$.

Weil eine Matrix dann und genau dann invertierbar ist wenn ihre Determinante ungleich 0 ist, folgt $\det(\Phi'(x)) \neq 0$. Außerdem finden wir für $y = \Phi(x)$, dass

$$\det\left((\Phi^{inv})'(y)\right) = \det\left((\Phi'(x))^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\Phi'(x))}.$$

Lemma 9.6 Sei $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ ein Diffeomorphismus, dann gilt für jedes $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ mit $R \subset X$, dass

$$\lambda(\Phi(R)) = \int_R |\det(\Phi')| d\lambda.$$

Um dieses Lemma zu beweisen, verwendet man, dass lokal eine differenzierbare Abbildung fast eine lineare Abbildung ist. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ kann man R in kleine Teilblöcke verteilen und zahlt dafür wie folgt mit ein extra ε :

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi(R)) &= \sum_{\alpha=1}^m \lambda(\Phi(R_\alpha)) \leq \\ \text{(Differenzierbarkeit)} &\leq \sum_{\alpha=1}^m \lambda(\Phi(x_\alpha) + \Phi'(x_\alpha)(R_\alpha - x_\alpha)) + \varepsilon = \\ \text{(Verschiebungsinvarianz)} &= \sum_{\alpha=1}^m \lambda(\Phi'(x_\alpha)(R_\alpha - x_\alpha)) + \varepsilon = \\ \text{(Schritt 2)} &= \sum_{\alpha=1}^m |\det(\Phi'(x_\alpha))| \lambda(R_\alpha - x_\alpha) + \varepsilon = \\ \text{(Verschiebungsinvarianz)} &= \sum_{\alpha=1}^m |\det(\Phi'(x_\alpha))| \lambda(R_\alpha) + \varepsilon = \\ \text{(Definition Integral)} &= \sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(x_\alpha))| d\lambda + \varepsilon \leq \\ \text{(Differenzierbarkeit)} &\leq \sum_{\alpha=1}^m \int_{R_\alpha} |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda + 2\varepsilon = \int_R |\det(\Phi'(\cdot))| d\lambda + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Art hat man \geq , wenn man mit $-\varepsilon$ bezahlt.

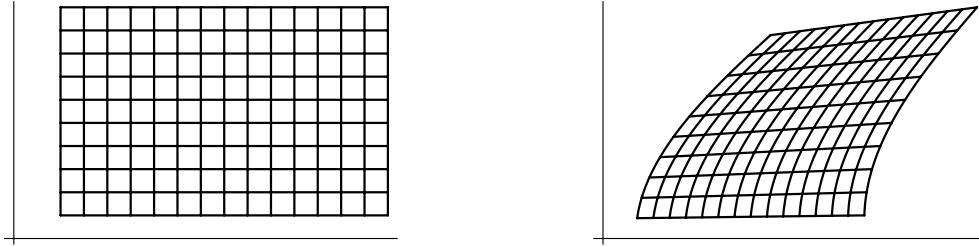
Schritt 4.

Lemma 9.7 Sei X, Y und Φ wie oben beschrieben, dann gilt für jedes $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subset X$, dass

$$\lambda(\Phi(\Omega)) = \int_{\Omega} |\det(\Phi')| d\lambda. \quad (9.1)$$

Man kann Ω mit abzählbar vielen Blöcken überdecken. Für endlich viele verwendet man das letzte Lemma. Für den Limes verwendet man den Satz für majorisierte Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda\left(\Phi\left(\bigcup_{i=0}^m R_i\right)\right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \lambda(\Phi(R_i)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \sum_{i=0}^m \mathbf{1}_{R_i} |\det(\Phi')| d\lambda = \\ &= \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \mathbf{1}_{R_i} |\det(\Phi')| d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{i=0}^m R_i} |\det(\Phi')| d\lambda. \end{aligned}$$



Es folgt

$$\lambda\left(\Phi\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i\right)\right) = \int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i} |\det(\Phi')| d\lambda$$

und wenn $\bigcup_{i=0}^{\infty} R_i$ die Menge Ω approximiert, folgt (9.1).

Schritt 5. Sei jetzt $f : Y \rightarrow [0, \infty)$ eine einfache Funktion. Wenn $f = \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i}$ kann man sofort das Ergebnis aus dem letzten Schritt anwenden. Wenn man aber m nach unendlich gehen läßt, folgt nur für nichtnegative, denn da gilt monotoner Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \int_Y f d\lambda &= \int_Y \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Y \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \int_Y \mathbf{1}_{A_i} d\lambda = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \int_X \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)} |\det(\Phi')| d\lambda = \\ &= \int_X \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m c_i \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)} |\det(\Phi')| d\lambda = \int_X (f \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda. \end{aligned}$$

Bemerke, dass wenn $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{A_i}$ mit A_i disjunkt, dann gilt $f \circ \Phi = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i \mathbf{1}_{\Phi^{-1}(A_i)}$.

Schritt 6. Schlussendlich soll man zeigen, dass das folgende Diagramm stimmt für eine Folge von elementaren Funktion $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, die nach f konvergieren:

$$\int_Y f d\lambda \longleftarrow \int_Y f_k d\lambda = \int_X (f_k \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda \longrightarrow \int_X (f \circ \Phi) |\det(\Phi')| d\lambda.$$

Satz 9.8 (Transformationsatz) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Wenn $f : Y \rightarrow [0, \infty)$ \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbar ist, dann gilt

$$\int_Y f \, d\lambda = \int_X (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \, d\lambda. \tag{9.2}$$

Bemerkung 9.8.1 Also ist die Funktion f Lebesgue-integrierbar auf Y genau dann, wenn $(f \circ \Phi) |\det \Phi'|$ integrierbar ist auf X . Dies gilt auch für Funktionen $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit Vorzeichenwechsel und es folgt dann, dass (9.2) auch gilt für \mathcal{L} -integrierbare Funktionen.

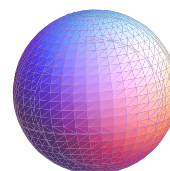
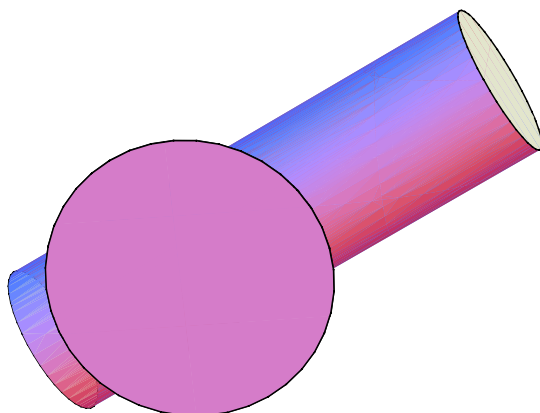
Man kann sogar einige Stellen zulassen, an denen Φ lokal nicht bijektiv ist.

Satz 9.9 (Erweiterter Transformationsatz) Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\Phi : X \rightarrow Y$ eine C^1 -Abbildung. Falls $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \subset X$ derart ist, dass $\Phi|_\Omega : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$ ein C^1 -Diffeomorphismus ist, dann gilt für jede \mathcal{L} - \mathcal{A}_T -messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, dass

$$\int_{\Phi(\Omega)} f \, d\lambda = \int_\Omega (f \circ \Phi) |\det \Phi'| \, d\lambda.$$

Bemerkung 9.9.1 Für \mathcal{L} -integrierbare Funktionen gilt dies auch, wenn sie das Vorzeichen wechseln.

9.4 Kugeln und Zylinder



Definition 9.10 Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^n kann man beschreiben durch $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \dots \sin \varphi_{n-1} \\ \vdots \\ r \cos \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \\ r \cos \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, \infty)$, $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ und $\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \in [0, \pi)$,
oder auch durch

$$x = r \omega$$

mit $r \in [0, \infty)$ und $\omega \in \partial B_1(0) := \{\omega \in \mathbb{R}^n; |\omega| = 1\}$.

Die Umkehrabbildung kann man grob wie folgt konstruieren:

$$\begin{aligned} r^2 &= x_1^2 + \cdots + x_n^2, \\ \cot \varphi_1 &= \frac{x_2}{x_1}, \\ \cot \varphi_2 &= \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ \cot \varphi_3 &= \frac{x_4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ &\vdots \\ \cot \varphi_{n-1} &= \frac{x_n}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2}}. \end{aligned}$$

Dabei ist φ_1 durch $\cot \varphi_1 = \frac{x_2}{x_1}$ nicht eindeutig festgelegt, sondern man nimmt $\varphi_1 \in (0, \pi)$, falls $x_2 > 0$ und $\varphi_1 \in (\pi, 2\pi)$ falls $x_2 < 0$. Falls $x_2 = 0$ oder $x_1 = 0$ ist $\cot \varphi_1 = \frac{x_2}{x_1}$ auch nicht definiert. Ähnliches passiert bei φ_2 bis φ_{n-1} .

Verallgemeinerte **Zylinderkoordinaten** bekommt man, indem man Kugelkoordinaten nur auf eine 'Teildimension' anwendet: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und man nimmt Koordinaten $(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)$.

Lemma 9.11 Das Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist gleich $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$.

Der Flächeninhalt der Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^n ist gleich $\frac{n \pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$

$n :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} :$	2	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi^2$	$\frac{8}{15}\pi^2$	$\frac{1}{6}\pi^3$	$\frac{16}{105}\pi^3$	$\frac{1}{24}\pi^4$	$\frac{32}{945}\pi^4$	$\frac{1}{120}\pi^5$	$\frac{64}{10395}\pi^5$

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Man hat

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$,
- $\Gamma(1) = 1$ und
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Aus den ersten beiden Ergebnissen folgt $n! = \Gamma(n+1)$.

Man beweist dies wie folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \left([-t^x e^{-t}]_0^M + \int_0^M x t^{x-1} e^{-t} dt \right) = \\ &= x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1 \quad \text{und} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Wir setzen $\sigma_n = \text{Vol} \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$ und verwenden die vollständige Induktion getrennt für gerade und ungerade Indizes. Man kennt $\sigma_1 = 2$ und $\sigma_2 = \pi$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \leq 1}} 1 \, dx = \int_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ |z| \leq 1}} \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^{n-2} \\ |y| \leq \sqrt{1-|z|^2}}} 1 \, dy \, dz = \\ &= \int_{\substack{z \in \mathbb{R}^2 \\ |z| \leq 1}} \sigma_{n-2} (1 - |z|^2)^{\frac{n-2}{2}} \, dz = \\ &= \sigma_{n-2} \int_{r=0}^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{n}{2}-1} r \, d\varphi \, dr = \\ &= 2\pi \sigma_{n-2} \left[-\frac{1}{n} (1 - r^2)^{n/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{n} \sigma_{n-2}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{2k} &= \frac{(2\pi)^{k-1}}{2k(2k-2)\dots 4} \sigma_2 = \frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^k}{\Gamma(1+k)}, \\ \sigma_{2k+1} &= \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} \sigma_1 = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \pi^k}{\Gamma(\frac{3}{2}+k)} = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}+k)}. \end{aligned}$$

Die beiden Formeln kann man zusammenfassen zu $\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$.

Vom Volumen zum Oberflächeninhalt der n -dimensionalen Sphäre (wenn wir mal annehmen, wir wissen wie er definiert wäre) kommt man durch

$$\lim_{r \downarrow 1} \frac{\text{Vol}(B_r(0)) - \text{Vol}(B_1(0))}{r-1} = \sigma_n \left(\frac{\partial}{\partial r} r^n \right)_{r=1} = n\sigma_n.$$

■

Analysis 3, Woche 10

Mannigfaltigkeiten I



10.1 Definition einer Mannigfaltigkeit

Die Definition einer Mannigfaltigkeit braucht den Begriff Diffeomorphismus, den wir in Definition 9.5 festgelegt haben. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Gebiete, dann nennt man eine Funktion $f : U \rightarrow V$ einen Diffeomorphismus, wenn f bijektiv und stetig differenzierbar ist, und auch f^{inv} stetig differenzierbar ist.

Beispiel 10.1 $f : (0, 1) \times (0, \pi) \rightarrow \{(x, y) ; |x| < 1 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1 - x^2}\}$ mit

$$f(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

ist ein Diffeomorphismus.

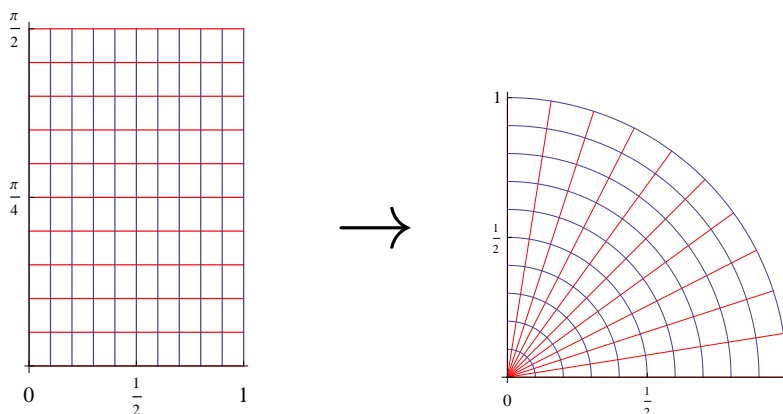


Abbildung 10.1: Das Bild zu Beispiel 10.1

Beispiel 10.2 $f : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ mit $f(x) = x^3$ ist kein Diffeomorphismus. Man sieht sofort, dass f bijektiv und stetig differenzierbar ist. Jedoch ist f^{inv} nicht differenzierbar in 0.

Das letzte Beispiel zeigt, dass die Tatsache alleine, dass f bijektiv und stetig differenzierbar ist, nicht impliziert, dass auch f^{inv} differenzierbar ist. Jedoch, wenn f und f^{inv} stetig differenzierbar sind und f hat eine höhere Differenzierbarkeit, dann folgt dies auch für f^{inv} .

Lemma 10.3 Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene Gebiete. Wenn $f : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist und $f \in C^k(U)$ mit $k \geq 2$, dann gilt auch $f^{\text{inv}} \in C^k(V)$.

Beweis. Wenn f und f^{inv} stetig differenzierbar sind, gilt

$$(f^{\text{inv}})'(y) = (f')^{-1}(f^{\text{inv}}(y)).$$

Sei $1 < m \leq k$. Mit Hilfe der Kettenregel, kann man jede Ableitung m -ter Ordnung von f^{inv} zurückführen auf Zusammenstellungen von $(f')^{-m_1}$ mit $m_1 \leq m$, von Ableitungen höchstens m -ter Ordnung von f und Ableitungen höchstens $(m-1)$ -ter Ordnung von f^{inv} . Mit Induktion nach m folgt die Behauptung für $m \in \{2, \dots, k\}$. ■

Definition 10.4 Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **m -dimensionale Mannigfaltigkeit** in \mathbb{R}^n , wenn zu jedem $x \in M$

- eine offene Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^n$ von x existiert,
- eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ existiert und
- es einem C^1 -Diffeomorphismus $f : U_x \rightarrow V$ gibt derart, dass

$$f(U_x \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0, \dots, 0\}). \quad (10.1)$$

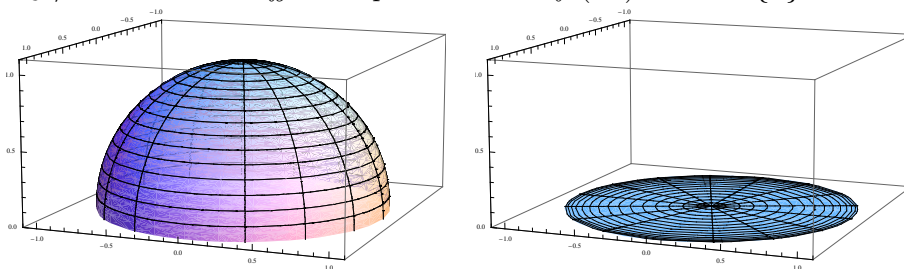
Bemerkung 10.4.1 Kurzgefasst kann man sagen: Zu jedem $x \in M$ gibt es lokal (auf U_x) einen Diffeomorphismus f von U_x auf V mit (10.1).

Bemerkung 10.4.2 Wenn man für jedes x so einen Diffeomorphismus f finden kann, für den sogar $f \in C^k$ gilt, nennt man M eine C^k -Mannigfaltigkeit.

Beispiel 10.5 Die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ ist eine Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

ist für x mit $x_3 \neq 0$ lokal ein Diffeomorphismus und $f(S^2) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.



Die Differenzierbarkeit von f ist hoffentlich klar. Dann braucht man bloß noch die Invertierbarkeit zu kontrollieren. Nach dem Satz über inverse Funktionen reicht es zu zeigen, dass $\det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right) \neq 0$:

$$\det \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2x_1 \\ 0 & 1 & -2x_2 \\ 0 & 0 & -2x_3 \end{pmatrix} = -2x_3 \neq 0.$$

Für x mit $x_3 = 0$ und $x_2 \neq 0$ nimmt man stattdessen:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2).$$

Für x mit $x_3 = x_2 = 0$ kann man

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

nehmen.

Beispiel 10.6 Der Kegel $K = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$ ist keine Mannigfaltigkeit. In einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ gibt es keinen C^1 -Diffeomorphismus, der K auf nette Art plattschlägt. Wenn man $(0, 0, 0)$ aus dem Kegel entfernt, hat man eine Mannigfaltigkeit.

Lemma 10.7 Sei X eine offene Menge in \mathbb{R}^m und $g : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^1 -Funktion. Dann ist der Graph $G = \{(x, g(x)); x \in X\}$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{m+k} .

Beweis. Man nehme $f : X \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$f(x, y) = (x, y - g(x)) \text{ für } x \in X, y \in \mathbb{R}^k.$$

Dann gilt $f(G) = X \times \{0, \dots, 0\}$ und

$$\det \left((\partial_j f_i)_{ij} \right) = \det \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -\frac{\partial g}{\partial x_i} & I_k \end{pmatrix} = 1.$$

■

10.2 Heuristik und Mathematik

Eindimensionales. Den einfachsten Mannigfaltigkeiten sind wir schon begegnet: den stetig differenzierbaren Kurven. Wenn man eine Kurve beschrieben hat, ist eine der ersten Fragen, die aufkommt, wie lang sie ist. Und wenn die Kurve einen Weg beschreibt, entlang welchen man einer Kraft ausgesetzt ist, möchte man die Arbeit berechnen können.

Wir haben uns eine Formel für die Länge einer Kurve gebastelt, die für glatte Bögen das Ergebnis brachte, das man im alltäglichen Leben haben möchte.

Definition 10.8 Für eine stetig differenzierbare Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man die Länge als

$$\ell(x) := \int_0^T |x'(t)| dt.$$

Man möchte, dass diese Länge für eine Gerade $[a, b] = \{x; x = ta + (1-t)b \text{ mit } t \in [0, 1]\}$ übereinstimmt mit der üblichen eindimensionalen Länge:

$$I_1([a, b]) = |a - b|.$$

Approximieren wir eine Kurve mit Geraden dann kommt man bei einer stetig differenzierbaren Kurve tatsächlich im Limes zu einer vernünftigen Antwort. Setze

$$\ell_m(x) := \sum_{k=0}^{m-1} I_1[x(t_{k+1}) - x(t_k)],$$

mit $t_k = \frac{k}{m}T$ und Schrittweite $\Delta t = \frac{1}{m}T$. Wenn x differenzierbar ist, dann gilt für jede Komponente von x :

$$x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k) = x'_i(t_k + \theta_{i,k}) \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)$$

(\mathcal{O} ist das kleine Größenordnungssymbol¹ von Landau) und

$$\begin{aligned} \ell_m(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} I_1[x(t_{k+1}) - x(t_k)] = \sum_{k=0}^{m-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (|x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)) = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} |x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Weil x und also auch die Komponenten stetig differenzierbar sind, gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \ell_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{m-1} |x'(t_k + \theta_{i,k})| \Delta t + \mathcal{O}(1) \right) = \int_0^T |x'(t)| dt = \ell(x).$$

Beispiel 10.9 Die Länge der Normalparabel $y = x^2$ zwischen $(-1, 1)$ und $(1, 1)$ findet man dann wie folgt: Die Kurve kann man beschreiben durch $k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $k(x) = (x, x^2)$. Man hat

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \int_{-1}^1 |k'(x)| dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + (2x)^2} dx = 2 \\ &= \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2) + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

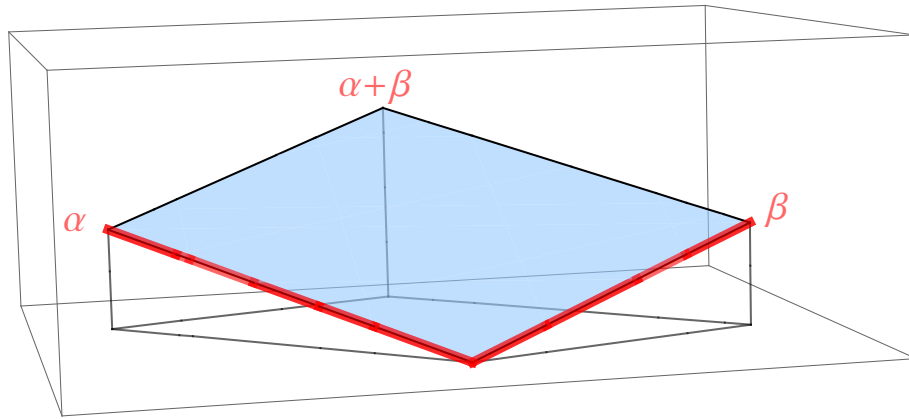
Zweidimensionales. Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^3 sind zum Beispiel die Sphäre oder das Paraboloid. Beide lassen sich noch relativ einfach beschreiben. Man kann sich aber auch fragen, wie gross der Oberflächeninhalt (eines Teils) ist. Auch hier möchten wir zu einer Definition kommen, die zu unserer Vorstellung passt.

Dazu werden wir eine Formel ableiten für die Oberfläche des zweidimensionalen Parallelogramms in drei Dimensionen, aufgespannt durch zwei Vektoren.

¹Das kleine Größenordnungssymbol von Landau: Man schreibt $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$ bei $x = 0$, wenn $\lim_{x \downarrow 0} x^{-n} f(x) = 0$. Es gibt auch das große Größenordnungssymbol von Landau. Man schreibt $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$ bei $x = 0$, wenn es $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x^{-n} f(x)| \leq M$ in einer Umgebung von $x = 0$. Beide Symbole werden ähnlich auch für $x \rightarrow \infty$ benutzt.

²Mit der Substitution $2x = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + (2x)^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} \sqrt{1 + (\sinh t)^2} \cosh t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} (\cosh t)^2 dt = \frac{1}{8} \int_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt = \\ &= \left[\frac{1}{16} e^{2t} + \frac{1}{4} t - \frac{1}{16} e^{-2t} \right]_{\ln(\sqrt{5}-2)}^{\ln(\sqrt{5}+2)} = \frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} + 2) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{5} - 2) + \frac{1}{2} \sqrt{5}. \end{aligned}$$



Definition 10.10 Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir den Flächeninhalt von

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n; x = t\alpha + s\beta \text{ mit } s, t \in [0, 1]\}$$

durch

$$I_2(P) = \sqrt{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta) - (\alpha \cdot \beta)^2}. \quad (10.2)$$

Wenn das Zweibein einen senkrechten Winkel bilden würde, dann würde man $I_2(P) = |\alpha| |\beta|$ erwarten. Für nicht rechtwinkelige Zweebeine, kann man β ersetzen durch

$$\tilde{\beta} = \beta - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \alpha.$$

Man erinnere sich, dass $\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \alpha$ die Projektion von β auf α ist. Dann ist $(\alpha, \tilde{\beta})$ ein rechtwinkeliges Zweibein, und $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^n; x = t\alpha + s\tilde{\beta} \text{ mit } s, t \in [0, 1]\}$ hat den gleichen Flächeninhalt. Es gilt

$$\begin{aligned} I_2(P) &= I_2(\tilde{P}) = |\alpha| |\tilde{\beta}| = |\alpha| \left| \beta - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \alpha \right| = \\ &= |\alpha| \sqrt{\beta \cdot \beta - 2 \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} (\alpha \cdot \beta) + \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha \cdot \alpha)^2} (\alpha \cdot \alpha)} = \\ &= \sqrt{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta) - (\alpha \cdot \beta)^2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Wenn wir explizite Koordinaten in \mathbb{R}^3 verwenden, folgt

$$\begin{aligned} I_2^{(3)}(P) &= \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2} = \\ &= \sqrt{\alpha_2^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_2^2 + \beta_1^2\alpha_3^2 + \alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3 - 2\alpha_1\beta_1\alpha_3\beta_3 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} = \\ &= \sqrt{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}. \end{aligned}$$

Das letzte kann man auch wie folgt schreiben:

$$I_2^{(3)}(P) = \left| \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \mathbf{e}_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \mathbf{e}_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \right| = |\alpha \times \beta|.$$

Definition 10.11 Für eine stetig differenzierbare zweidimensionale Kurve (auch Fläche genannt) $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert man den Oberflächeninhalt durch

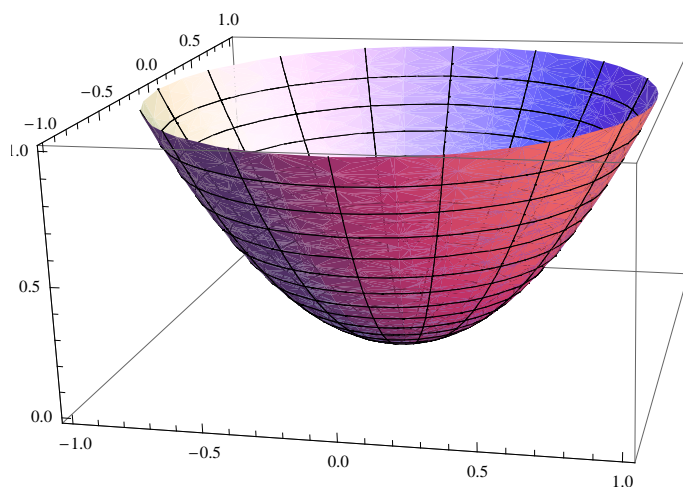
$$\text{Vol}_2^{(n)}(x) = \int_D \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}} d(t, s).$$

Bemerkung 10.11.1 Für $n = 2$ gilt

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix}} = \\ &= \sqrt{\det \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \right)} = \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial s} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix}} = \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \\ \frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

und wir erhalten die bekannte Jacobi-Determinante.

Beispiel 10.12 Das Paraboloid $z = x^2 + y^2$ abgeschnitten bei $z = 1$. Man beschreibt es zum Beispiel durch $k : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $k(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$.



Weil

$$\frac{\partial k}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix},$$

hat man

$$\text{Vol}_2^{(3)}(k) = \int_{B_1(0)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \end{pmatrix}} d(x, y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{B_1(0)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}} d(x, y) = \\
&= \int_{B_1(0)} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} d(x, y) = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1} r d\varphi dr = \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

Beispiel 10.13 Die Sphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ kann man parametrisieren durch

$$s(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\psi \in [0, \pi)$. Man findet mit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial \varphi} &= (-\sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi \sin \psi, 0), \\
\frac{\partial s}{\partial \psi} &= (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, -\sin \psi),
\end{aligned}$$

dass

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(s) &= \int_{[0, 2\pi) \times [0, \pi)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \psi} \\ \frac{\partial s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \varphi} & \frac{\partial s}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial s}{\partial \psi} \end{pmatrix}} d(\varphi, \psi) = \\
&= \int_{[0, 2\pi) \times [0, \pi)} \sqrt{\det \begin{pmatrix} (\sin \psi)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} d(\varphi, \psi) = \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \psi d\psi d\varphi = 2\pi [\cos \psi]_0^\pi = 4\pi.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hat man erwartet.

10.3 Integral über eine Mannigfaltigkeit

Wie man bei einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit die Länge und allgemeinere Größen auf dieser Mannigfaltigkeit durch kleine Geraden approximiert, werden auf zwei- (und mehr-)dimensionale Mannigfaltigkeiten definiert durch eine Riemann-Summe, die mit Hilfe von kleinen ebenen Flächen (Parallelepipede) und mit stückweise stetigen Funktionen gebildet werden:

$$\begin{aligned}
\int_M f(x) dV_m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p_n} \sum_{j=0}^{q_n} f(x_{(n)}^{i,j}) \sqrt{\det \left(\left(x_{(n)}^{i+1,j} - x_{(n)}^{i,j} \right) \cdot \left(x_{(n)}^{i,j+1} - x_{(n)}^{i,j} \right) \right)} = \\
&= \lim_{n, \ell \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{p_n} \sum_{j=0}^{q_n} f(x_{(n)}^{i,j}) \sqrt{\det \left(\partial_{x_1} k \left(x_{(n)}^{i,j} \right) \cdot \partial_{x_2} k \left(x_{(n)}^{i,j} \right) \right)_{i,j}} \Delta t_{n,i} \Delta s_{n,j} + \mathcal{O}(\Delta t_{n,i}) + \mathcal{O}(\Delta s_{n,j}) \right) = \\
&= \int_D (f \circ k)(y) \sqrt{\det \left((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)(y)} dy + \lim_{\substack{\Delta t_{n,i} \rightarrow 0 \\ \Delta s_{n,j} \rightarrow 0}} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) = \\
&= \int_D (f \circ k)(y) \sqrt{\det \left((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)(y)} dy.
\end{aligned}$$

Definition 10.14 Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n , die man mit der C^1 -Funktion $k : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eindeutig beschreiben kann:

$$M = k(D) := \{x = k(y) \in \mathbb{R}^n; y \in D \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Dann setzt man

$$\int_M f(x) dV_m = \int_D (f \circ k)(y) \sqrt{\det \left((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)}(y) dy.$$

Die Funktion k ist eine **Parametrisierung** von M . Die Matrix $(\partial_i k(y) \cdot \partial_j k(y))_{ij}$ nennt man die (**erste**) **Fundamentalmatrix** zu der Parametrisierung k an der Stelle $p = k(y)$.

Bemerkung 10.14.1 Eine Mannigfaltigkeit, die man nicht mit einer Funktion k beschreiben kann, teilt man auf in Teilmannigfaltigkeiten, die mit einer Funktion zu beschreiben sind und addiert diese Integrale für $\int_M f(x) dV_m$.

Bemerkung 10.14.2 Man soll noch zeigen, dass diese Definition nicht von der Parametrisierung abhängt. Wenn man zwei verschiedene Parametrisierungen k und h hat, für die es ein Diffeomorphismus Φ gibt derart, dass

$$h = k \circ \Phi,$$

so folgt das gewünschte Ergebnis aus den Transformationssatz. Denn an der Stelle y gilt:

$$\begin{aligned} \det \left((\partial_i h \cdot \partial_j h)_{ij} \right)_{|_y} &= \det \left((\nabla h)^T (\nabla h) \right)_{|_y} = \\ &= \det \left(\left(\nabla (k \circ \Phi) \right)^T \left(\nabla (k \circ \Phi) \right) \right)_{|_y} = \\ &\quad \text{(wegen des Kettenregels)} \\ &= \det \left(\left((\nabla k) \circ \Phi \right)^T \left((\nabla k) \circ \Phi \right) \right)_{|_y} = \\ \text{(denn für Matrizen gilt } (AB)^T &= B^T A^T \text{ und } (AB)C = A(BC) \text{)} \\ &= \det \left((\Phi')^T \left((\nabla k) \circ \Phi \right)^T \left((\nabla k) \circ \Phi \right) \Phi' \right)_{|_y} = \\ \text{(für quadratische Matrizen gilt } \det(AB) &= \det(A) \det(B) \text{)} \\ &= \det \left((\Phi')^T \right)_{|_y} \det \left(\left((\nabla k) \circ \Phi \right)^T \left((\nabla k) \circ \Phi \right) \right)_{|_y} \det(\Phi')_{|_y} = \\ &= (\det(\Phi'(y)))^2 \det \left((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)_{|_{\Phi(y)}}. \end{aligned}$$

Weil

$$\sqrt{\det \left((\partial_i \tilde{k} \cdot \partial_j \tilde{k})_{ij} \right)_{|_y}} = |\det(\Phi'(y))| \sqrt{\det \left((\partial_i k \cdot \partial_j k)_{ij} \right)_{|_{\Phi(y)}}}$$

folgt der Term $|\det(\Phi'(y))|$, welcher nach dem Transformationssatz die beiden Integrale übereinstimmen lässt. Für beliebige C^1 -Parametrisierungen h und k von M ist die Funktion Φ wohldefiniert durch

$$\Phi = k^{inv} \circ h$$

aber nicht unbedingt ein Diffeomorphismus.

Analysis 3, Woche 11

Mannigfaltigkeiten II



11.1 Immersionen

Definition 11.1 Sei $m \leq n \in \mathbb{N}$ und $X \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Abbildung $f \in C^1(X; \mathbb{R}^n)$ heißt **Immersion**, wenn für jedes $x \in X$ die Matrix $\nabla f(x)$ injektiv ist.

Bemerkung 11.1.1 Man hat

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}$$

und $\nabla f(x) \in M^{n \times m}$ mit $n \geq m$. Wenn eine Matrix in $M^{n \times m}$ injektiv ist, muss gelten $n \geq m$. Übrigens kann man statt ∇f auch f' schreiben.

Satz 11.2 Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und sei $f \in C^k(X; \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ eine Immersion. Dann existiert für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \subset \mathbb{R}^m$ derart, dass $f(U_x)$ eine m -dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist.

Beweis. Sei $x_0 \in X$ und setze $z_0 = f(x_0)$. Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die ersten m Zeilen von $\nabla f(x_0)$ eine injektive Matrix liefern:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Abbildung $g \in C^1(X \times \mathbb{R}^{n-m}; \mathbb{R}^n)$, definiert für $x \in X \subset \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ durch

$$g(x, y) = f(x) + (0, y).$$

Es folgt

$$\nabla g(x_0, 0) = \begin{pmatrix} M & O \\ A & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

und $\det(\nabla g(x_0, 0)) = \det(M) \neq 0$. Der Satz über Umkehrfunktionen liefert offene Umgebungen $U_{(x_0, 0)}$ in $X \times \mathbb{R}^{n-m}$ und U_{z_0} in \mathbb{R}^n und eine Umkehrfunktion $g^{\text{invers}} : U_{z_0} \rightarrow U_{(x_0, 0)}$. Insbesondere gilt $g^{\text{invers}}(U_{z_0} \cap f(U_{x_0})) \subset X \times \{0, \dots, 0\}$. ■

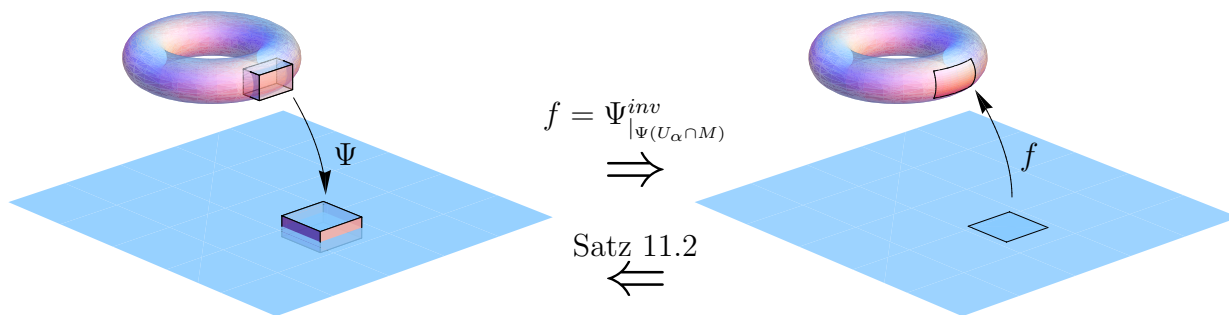


Abbildung 11.1: Zu der lokalen Definition einer Mannigfaltigkeit: links mit Hilfe eines Diffeomorphismus und rechts mit einer Immersion.

Bemerkung 11.2.1 Dieser Satz bedeutet nicht, dass $f(X)$ eine C^k -Mannigfaltigkeit ist. Er sagt nur aus, dass $f(U_x)$ (lokal) eine C^k -Mannigfaltigkeit ist. Siehe nächstes Beispiel.

Beispiel 11.3 Für $a > 0$ liefern die Abbildungen $f_a : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f_a(x) = \begin{pmatrix} (1 + a \cos x) \cos x \\ (1 + a \cos x) \sin x \end{pmatrix}$$

die sogenannten *Limaçons von Pascal*. Sie werden auch *Pascalsche Schnecken* genannt.

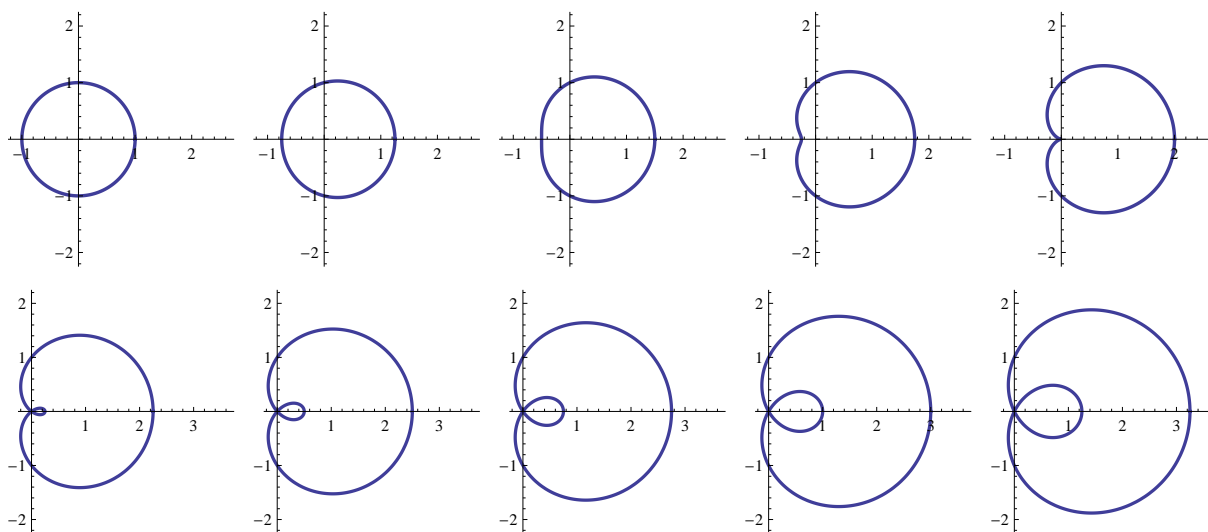


Abbildung 11.2: Limaçon von Pascal mit $a = k/4$ und $k = 0, 1, 2, \dots$

Weil

$$\nabla f_a(x) = \begin{pmatrix} -(1 + 2a \cos x) \sin x \\ -a + (1 + 2a \cos x) \cos x \end{pmatrix}$$

folgt $\|\nabla f_a(x)\| = 0$ nur, wenn $\sin x = 0$. Denn wenn $1 + 2a \cos x = 0$, ist die zweite Komponente nur dann auch gleich 0, wenn $a = 0$ gilt, und wir haben einen Widerspruch. Also muß $\sin x = 0$ gelten, und das heißt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\cos x = (-1)^k$ und die zweite Komponente ist 0, wenn

$$-a + (-1)^k + 2a = 0.$$

Weil a nicht negativ ist, folgt dass k ungerade ist und $a = 1$. Das heißt, für $a \neq 1$ ist f_a eine Immersion und $f_a(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ist für genügend kleines ε eine Mannigfaltigkeit. Für $a \in [0, 1)$ ist $f_a(\mathbb{R})$ sogar eine Mannigfaltigkeit. Für $a > 1$ gibt es Selbstdurchschneidungen.

Beispiel 11.4 Die Sphäre S^2 in \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$$

kann man, mit Ausnahme von $(0, 0, 1)$, mit Hilfe einer stereographischen Projektion beschreiben:

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{1-x_3} \\ \frac{2x_2}{1-x_3} \\ 1-x_3 \end{pmatrix},$$

oder genauer gesagt, mit der Inverse zu dieser Projektion. Man vergleiche dazu die ähnlichen Dreiecke

$$\Delta_1 = [(0, 1), (x_1, x_3), (0, x_3)] \text{ und } \Delta_2 = [(0, 1), (y_1, 0), (0, -1)]$$

und findet so $\frac{y_1}{2} = \frac{x_1}{1-x_3}$. Auch findet man so $\frac{y_2}{2} = \frac{x_2}{1-x_3}$.

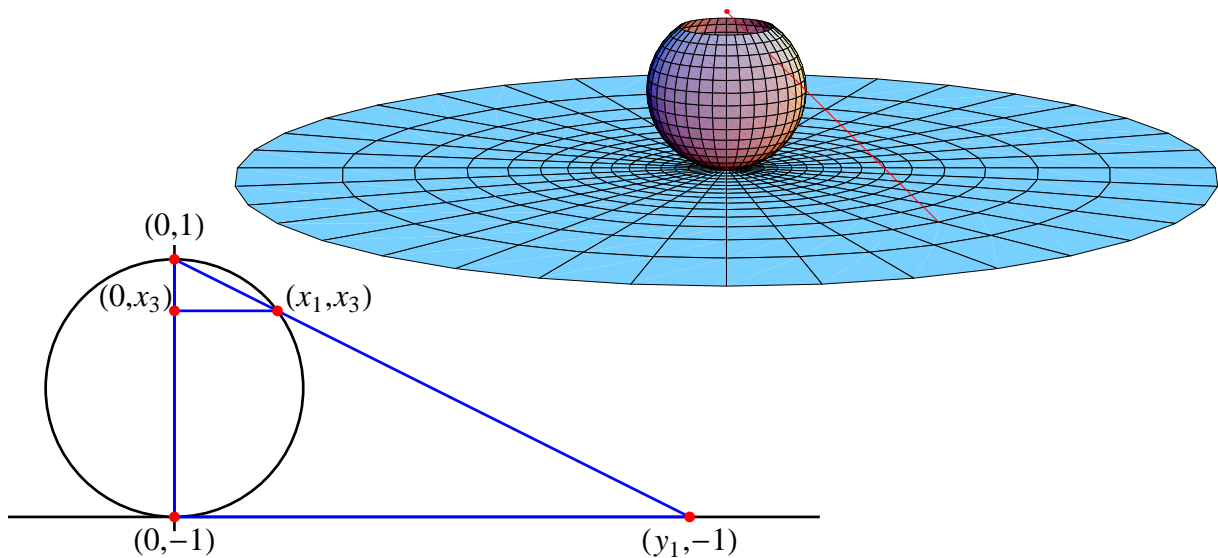


Abbildung 11.3: Die stereographische Projektion aus dem Nordpol auf die tragende Ebene.

Diese Abbildung φ ist C^1 für $x_3 < 1$ und $\psi = (\varphi|_{S^2})^{\text{invers}}$ soll eine Immersion sein. Man kann ψ wie folgt berechnen:

Aus $\frac{y_1}{2} = \frac{x_1}{1-x_3}$, $\frac{y_2}{2} = \frac{x_2}{1-x_3}$ und $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ folgt

$$y_1^2 + y_2^2 = 4 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = 4 \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = 4 \frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{8}{1-x_3} - 4$$

und $x_3 = 1 - \frac{8}{4+y_1^2+y_2^2}$. Auch folgt

$$x_1 = \frac{1}{2} (1-x_3) y_1 = \frac{4y_1}{4+y_1^2+y_2^2} \text{ und } x_2 = \frac{4y_2}{4+y_1^2+y_2^2}.$$

Also hat man

$$\psi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4y_1}{4+y_1^2+y_2^2} \\ \frac{4y_2}{4+y_1^2+y_2^2} \\ 1 - \frac{8}{4+y_1^2+y_2^2} \end{pmatrix}.$$

Man kann direkt kontrollieren, dass ψ eine Immersion ist, denn

$$\nabla\psi = \begin{pmatrix} \frac{16-4y_1^2+4y_2^2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & -\frac{8y_1y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \\ -\frac{8y_1y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & \frac{16+4y_1^2-4y_2^2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \\ \frac{16y_1}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} & \frac{16y_2}{(4+y_1^2+y_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

und dividiert man durch den Faktor $\frac{4}{(4+y_1^2+y_2^2)^2}$, so findet man

$$\begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix}.$$

Für $y_1 \neq 0$ folgt

$$\det \begin{pmatrix} -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix} = -4y_1(4 + y_1^2 + y_2^2) \neq 0,$$

für $y_2 \neq 0$ folgt

$$\det \begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ 4y_1 & 4y_2 \end{pmatrix} = 4y_2(y_1^2 + y_2^2 + 4) \neq 0$$

und für $y_1^2 + y_2^2 \neq 4$ folgt

$$\det \begin{pmatrix} 4 - y_1^2 + y_2^2 & -2y_1y_2 \\ -2y_1y_2 & 4 + y_1^2 - y_2^2 \end{pmatrix} = (y_1^2 + y_2^2 - 4)^2 \neq 0.$$

Weil diese drei Ausnahmen einen leeren Durchschnitt haben ist $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{0, 0, 1\}$ eine Immersion.

Beispiel 11.5 Sei $0 < r < a$. Die C^∞ -Abbildung $g_{a,r} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$g_{a,r}(s, t) = \begin{pmatrix} (a + r \cos t) \cos s \\ (a + r \cos t) \sin s \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

liefert für alle $0 < r < a$ einen Torus.

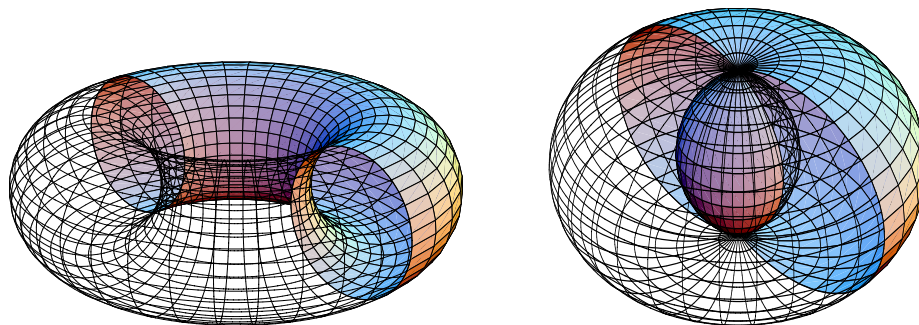


Abbildung 11.4: Graphische Darstellungen zu $g_{2,1}$ und $g_{1,2}$.

11.2 Lokale Karten und Parametrisierungen

Nicht alle Mannigfaltigkeiten lassen sich so leicht durch eine Parametrisierung definieren. Auch wollen wir abstraktere Definitionen von Mannigfaltigkeiten zulassen, die nicht von vornherein in einen euklidischen Raum \mathbb{R}^n eingebettet sind.

Beispiel 11.6 Wir definieren $M = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, wobei wir wie folgt Randpunkte identifizieren:

$$(0, t) = (2\pi, -t) \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Versucht man M als Oberfläche in \mathbb{R}^3 darzustellen, findet man das Möbiusband. Ein Streifen von M , das heißt $(s, t) \in M$ mit $|t| < t_0$, läßt sich in \mathbb{R}^3 als ein Band darstellen, das man am Ende verdreht zusammengeklebt hat.

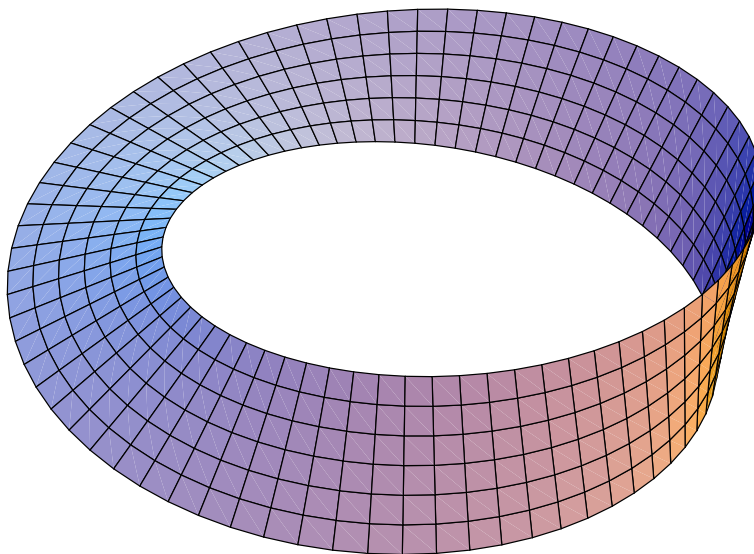


Abbildung 11.5: Ein Streifen aus dem Möbiusband. Das Möbiusband ist nicht **orientierbar**: es gibt keinen stetigen Normalenvektor auf dem Möbiusband.

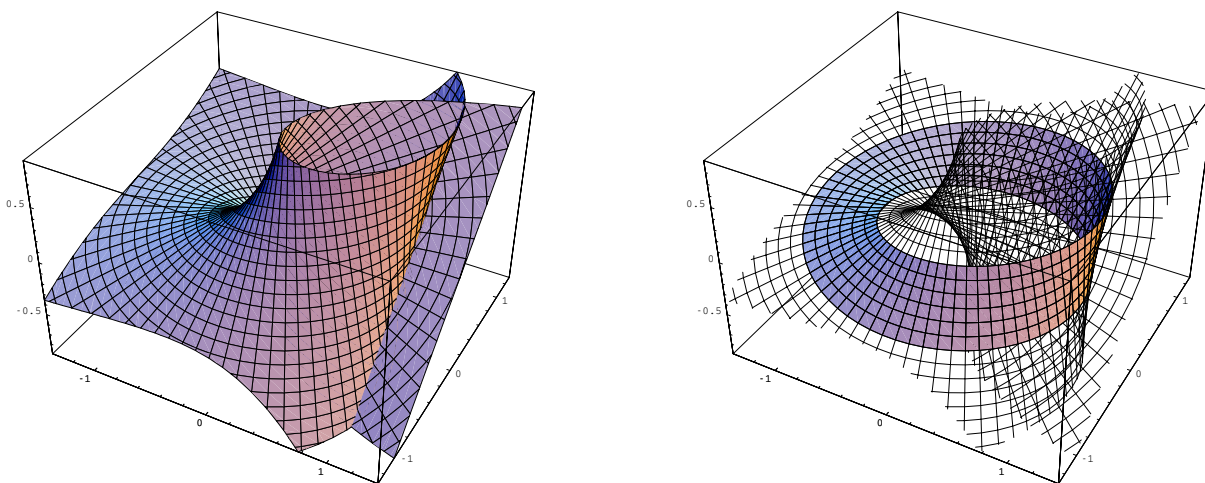


Abbildung 11.6: Wenn man mehr vom Möbiusband zeigt, wird es unübersichtlich. Hier findet man das Bild, wenn man das Band in Abbildung 11.5 fortsetzt innerhalb eines Würfels um O .

Definition 11.7 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Man nennt $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha); \alpha \in A\}$ mit $\varphi_\alpha \in C^1(U_\alpha; \mathbb{R}^m)$ und $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen einen **Atlas** für M , wenn $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset M$ (M wird überdeckt von den U_α) und für jede $\alpha, \beta \in A$ gilt:

- $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$ ist injektiv;
- $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M})^{invers} : V_\alpha \rightarrow M$ mit $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap M)$ ist eine Immersion.

Bemerkung 11.7.1 $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$ ist die Einschränkung von φ_α auf $U_\alpha \cap M$, das heißt, $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M} : U_\alpha \cap M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist definiert durch $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}(x) = \varphi_\alpha(x)$ für $x \in U_\alpha \cap M$.

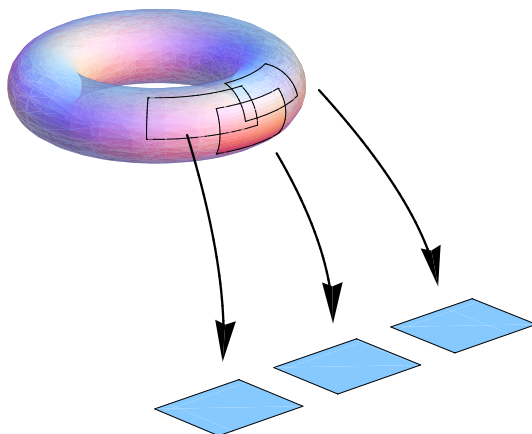


Abbildung 11.7: Einige der Funktionen $\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}$. Die Funktion φ_α ist definiert auf U_α .

Bemerkung 11.7.2 Das Paar $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M}, U_\alpha \cap M)$ nennt man **Karte**.

Die Funktion $(\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap M})^{invers}$ ist eine lokale Parametrisierung.

Bemerkung 11.7.3 Um die ganze Mannigfaltigkeit betrachten zu können, reicht eine Karte meistens nicht aus. Denn wandert man zum Beispiel über den Torus, dann muss man wahrscheinlich gelegentlich die Karte wechseln. Eine Mannigfaltigkeit kann übrigens auch durch mehrere Atlanten beschrieben werden.

Bemerkung 11.7.4 Die Definition von Mannigfaltigkeit sagt uns, dass zu jedem $x \in M$ lokal eine Karte existiert.

Beispiel 11.8 Die Sphäre S^2 in \mathbb{R}^3 :

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$$

kann man mit zwei Karten beschreiben. Man nehme zum Beispiel für φ_1 die stereographische Projektion aus dem Nordpol auf die Fläche $x_3 = -1$ und für φ_2 die stereographische Projektion aus dem Südpol auf die Fläche $x_3 = 1$.

11.3 Vektorfelder und Pfaffsche Formen

Wir wollen Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten definieren und benutzen können. Das heißt, wir wollen Vektorfelder definieren, die an jeder Stelle der Mannigfaltigkeit tangential zur Oberfläche zeigen. Wenn wir als Beispiel die n -dimensionale Sphäre S^n in \mathbb{R}^{n+1} betrachten, dann kann man in jedem Punkt p tangential einen Vektor in \mathbb{R}^{n+1} anhängen. Tangential bedeutet aber, dass man diese Vektoren nur wählen darf aus einem n -dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^{n+1} .

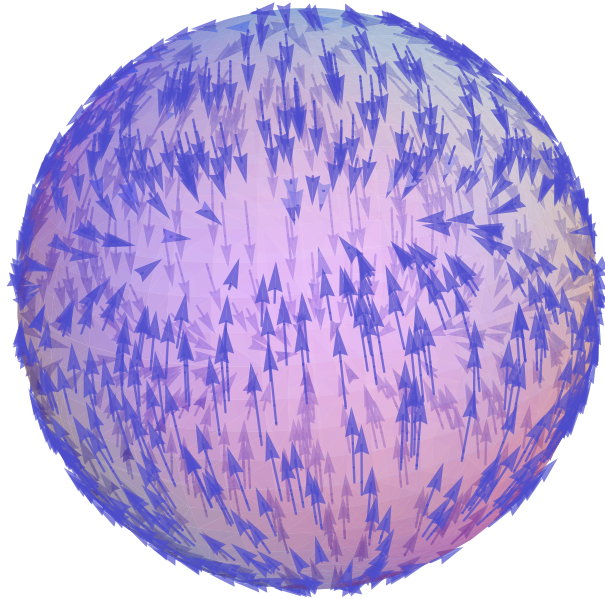


Abbildung 11.8: Ein Vektorfeld auf der Sphäre.

11.3.1 Der Tangentialraum

Definition 11.9 Sei M eine m -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n (mit $m \leq n$) und sei $p \in M$. Sei ψ eine Immersion mit $\psi(0) = p$, die M lokal parametrisiert, und sei \mathcal{R} der Bildraum (Spaltenraum) von $\nabla\psi(0)$.

Man nennt $T_pM = (p, \mathcal{R})$ den **Tangentialraum** an M im Punkt p .

T_pM ist ein Vektorraum mit der folgenden Vektorraumstruktur:

$$s(p, v) + t(p, u) = (p, sv + tu) \text{ für } s, t \in \mathbb{R} \text{ und } u, v \in \mathcal{R}.$$

Definition 11.10 Ein Element $(p, v) \in T_pM$ nennt man **Tangentialvektor**.

Die Vereinigung $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ nennt man das **Tangentialbündel** zu M .

Bemerkung 11.10.1 Man kann zeigen, dass der Tangentialraum unabhängig ist von der gewählten lokalen Parametrisierung ψ , wenn diese nur eine Immersion ist.

Bemerkung 11.10.2 T_pM ist ein m -dimensionaler Untervektorraum von $T_p\mathbb{R}^n = (p, \mathbb{R}^n)$.

Satz 11.11 Sei M eine m -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n (mit $m \leq n$) und sei $p \in M$.

- Für jede $(p, v) \in T_pM$ gibt es eine Kurve $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$, $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.
- Wenn es eine Kurve $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ gibt mit $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$ und $\gamma(0) = p$, dann gilt $(p, \gamma'(0)) \in T_pM$.

Beweis. Sei (φ_p, U_p) eine Karte. Wir dürfen annehmen, dass $\varphi_p(p) = 0$. Wir nehmen $\psi := \left(\varphi_p|_{U_p \cap M} \right)^{\text{invers}} : \mathbb{R}^m \rightarrow M$.

- Sei $T_pM = (p, \mathcal{R})$. Setzen wir $\gamma(t) = \psi(t\xi)$ mit $\xi \in \mathbb{R}^m$. Es folgt, dass $\gamma(0) = \psi(0) = p$ und $\gamma'(0) = (\nabla\psi(0))\xi$. Weil ψ eine Immersion ist, ist $(\nabla\psi(0)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$ bijektiv und wir können $\xi \in \mathbb{R}^m$ finden mit $(\nabla\psi(0))\xi = v$.

- Wenn es eine Kurve $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^n)$ gibt mit $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset M$ und $\gamma(0) = p$, dann gilt $\psi(\varphi_p(\gamma(t))) = \gamma(t)$ und die Kettenregel liefert

$$\gamma'(0) = \nabla\psi(0) \left(\nabla\varphi_p(p) \gamma'(0) \right) \in \mathcal{R},$$

denn $\nabla\psi(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$.

■

Für Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten kommt man zur folgenden Definition.

Definition 11.12 Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n (mit $m \leq n$). Eine Abbildung $\mathbf{v} : M \rightarrow TM$ mit $\mathbf{v}(p) = (p, v(p)) \in T_pM$ nennt man **Vektorfeld** auf M .

11.3.2 Der Kotangententialraum

Wenn V ein Vektorraum ist, dann definiert man den dualen Vektorraum V^* als die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Ist V endlich dimensional, dann ist jede lineare Abbildung stetig. Hat man V als Unterraum von \mathbb{R}^n mit Basis $\{v_1, \dots, v_m\}$, dann kann man jedes Element $L \in V^*$ definieren, indem man es festlegt auf die Basiselemente:

$$Lv_i = \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Für $v = \sum_{i=1}^m c_i v_i$ folgt dann aus der Linearität

$$Lv = L \left(\sum_{i=1}^m c_i v_i \right) = \sum_{i=1}^m c_i Lv_i = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i.$$

Nimmt man das Standardskalarprodukt zur Hilfe, kann man L in Matrixform schreiben mit der Matrix zusammengestellt aus den Basisvektoren

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & \cdots & v_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

als

$$L = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) (V^T V)^{-1} V^T. \quad (11.2)$$

Denn so gilt

$$L \left(\sum_{i=1}^m c_i v_i \right) = L \left(V \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \right) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) (V^T V)^{-1} V^T V \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i$$

Man soll bemerken, dass die Unabhängigkeit von $\{v_1, \dots, v_m\}$ impliziert, dass die $m \times m$ -Matrix $V^T V$ invertierbar ist, denn aus diese Unabhängigkeit folgt die Injektivität von V und dann auch, dass $V^T V$ positiv definit ist

$$x \cdot V^T V x = \|Vx\|^2 > 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Dann sind alle Eigenwerte von $V^T V$ strikt positiv und es folgt $\det(V^T V) > 0$.

Definition 11.13 Sei M eine m -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und sei $p \in M$. Den Dualraum T_p^*M zu T_pM nennt man den **Kotangentialraum** an M im Punkt p .

Genauer gesagt, wenn $T_pM = (p, V)$, dann setzt man $T_p^*M = (p, V^*)$.

Definition 11.14 Ein Element $(p, v) \in T_p^*M$ nennt man **Kotangentialvektor**.

Die Vereinigung $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ nennt man das **Kotangentialbündel** zu M .

Dual zum Vektorfeld definiert man anschließend die Pfaffsche Form. Sie wird auch Differentialform von Grad 1 genannt.

Definition 11.15 Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n (mit $m \leq n$). Eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow T^*M$ mit $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_p^*M$ nennt man **Pfaffsche Form** auf M .

11.3.3 Dualität

Für eine lokale Parametrisierung $\psi : U_{x_0} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\psi(x_0) = p \in M$ findet man eine Basis für T_pM durch $\{v_i\}_{i=1}^m$, oder genauer $\{(p, v_i)\}_{i=1}^m$, mit

$$v_i = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) (x_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Eine duale Basis für T_p^*M ist dann $\{(p, v_i^*)\}_{i=1}^m$, wobei v_i^* definiert ist durch

$$\langle v_i^*, v_j \rangle_p = \delta_{ij}.$$

Die Dualität von Vektorfeldern und Pfaffschen Formen an der Stelle p wird bezeichnet mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p^*M \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}.$$

Es folgt aus (11.2), mit $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ der i -te Basisvektor in \mathbb{R}^m und (11.1), dass für $w = Vx$ mit

$$V = \nabla \psi(x_0),$$

also gilt $(p, w) \in T_pM$, dass

$$\langle v_i^*, w \rangle_p = \mathbf{e}_i^T (V^T V)^{-1} V^T w.$$

Will man diese Dualität global definieren, dann ist es notwendig die Stetigkeit oder differenzierbare Abhängigkeit der Ortsvariablen ins Spiel zu bringen. Man sagt $f : M \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ liegt in $C^q(M; \mathbb{R}^\ell)$, wenn für jede lokale Parametrisierung $\psi : U_x \rightarrow M$, die eine Immersion ist, gilt $f \circ \psi \in C^q(U_x; \mathbb{R}^\ell)$.

Definition 11.16 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$.

- Die Vektorfelder $\mathbf{v} : M \rightarrow TM$ mit $\mathbf{v}(p) = (p, v(p)) \in T_pM$ und $p \mapsto v(p) \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$ bezeichnet man mit $\mathcal{V}^k(M)$.
- Die Pfaffschen Formen $\alpha : M \rightarrow T^*M$ mit $\alpha(p) = (p, \alpha(p)) \in T_p^*M$ und $p \mapsto \alpha(p) \in C^k(M; \mathbb{R}^n)$ bezeichnet man mit $\Omega_k(M)$.

Bemerkung 11.16.1 Auf $\mathcal{V}^q(M)$ und $\Omega_q(M)$ kann man eine skalare Multiplikation mit $C^q(M; \mathbb{R}^n)$ -Funktionen definieren:

$$(f\mathbf{v})(p) = (p, f(p)v(p)) \quad \text{und} \quad (f\boldsymbol{\alpha})(p) = (p, f(p)\alpha(p)).$$

Sei $\psi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung mit $\psi(0) = p$, und sei $\{e_1, \dots, e_m\}$ die Standardbasis für \mathbb{R}^m . Dann findet man

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(0), \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \psi(0) \right\}$$

als Basis für $T_p M$. Lässt man die lokale Parametrisierung weg und behält man nur $\psi(0) = p$, dann kann man verstehen, dass man oft

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} p, \frac{\partial}{\partial x_2} p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} p \right\}$$

als Basis für $T_p M$ schreibt. Ein Tangentialvektor an der Stelle p wird dann

$$\left(p, f_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1} p + \dots + f_m(p) \frac{\partial}{\partial x_m} p \right).$$

Für die zugehörige Basis für $T_p^* M$ schreibt man

$$\{dx_1, \dots, dx_m\}.$$

Eine Pfaffsche Form wird an der Stelle p dann beschrieben durch

$$dg = g_1^*(p)dx_1 + \dots + g_m^*(p)dx_m,$$

oder formell

$$(p, g_1^*(p)dx_1 + \dots + g_m^*(p)dx_m),$$

und man findet so

$$\left\langle dg, f_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1} p + \dots + f_m(p) \frac{\partial}{\partial x_m} p \right\rangle_p = \sum_{i=1}^m g_i^*(p) f_i(p).$$

Analysis 3, Woche 12

Differentialformen I



12.1 Multilineare Algebra

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Dann definiert man V^* als den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen $L : V \rightarrow \mathbb{R}$. Allgemeiner kann man multilineare Abbildungen $\omega : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten spielen insbesondere die **antisymmetrischen, multilinearen Abbildungen** eine wichtige Rolle.

Definition 12.1 Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} und $k \in \mathbb{N}^+$. Eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \times} \rightarrow \mathbb{R}$$

1. heißt **multilinear**, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Abbildung

$$v^i \mapsto \omega(v^1, \dots, v^i, \dots, v^k)$$

linear ist;

2. heißt **antisymmetrisch**, wenn für jedes $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\omega(v^1, \dots, v^i, \dots, v^j, \dots, v^k) = -\omega(v^1, \dots, v^j, \dots, v^i, \dots, v^k).$$

(Die Vertauschung zweier Vektoren liefert ein extra Minuszeichen.)

So eine Abbildung ω nennt man eine **äußere Form von Grad k** . Die Menge aller **äußeren k -Formen** bezeichnet man mit $\Lambda^k(V^*)$.

Lemma 12.2 Definiert man Addition und Multiplikation mit Skalaren wie üblich:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega_2)(v^1, \dots, v^k) &= \omega_1(v^1, \dots, v^k) + \omega_2(v^1, \dots, v^k), \\(\lambda\omega)(v^1, \dots, v^k) &= \lambda\omega(v^1, \dots, v^k),\end{aligned}$$

dann ist $\Lambda^k(V^*)$ ein Vektorraum über \mathbb{R} .

Bemerkung 12.2.1 Man setzt $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$. Es folgt direkt, dass $\Lambda^1(V^*) = V^*$.

Beweis. Direktes Ausschreiben zeigt die Multilinearität und die Antisymmetrie von $\omega_1 + \omega_2$ und $\lambda\omega$, wenn ω_1, ω_2 und ω diese Eigenschaften haben. ■

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für V . Dann ist $L \in V^*$ durch die Werte auf den Basiselementen festgelegt. Anders gesagt $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subset V^*$ mit

$$\varepsilon_i(c_1e_1 + \dots + c_n e_n) = c_i \text{ für alle } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

bildet eine Basis für V^* . Dies bedeutet

$$\dim(\Lambda^1(V^*)) = \dim V^* = \dim V = n.$$

Wegen der Linearität reicht es übrigens für (12.1), wenn man $\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ setzt.

Aus der Multilinearität folgt, dass jede k -multilineare Abbildung durch die Werte angenommen auf $\{e_1, \dots, e_n\}^k$ festgelegt ist. Die Antisymmetrie sorgt dafür, dass der Wert unter Permutationen festliegt. Das heißt, $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ ist genau festgelegt, wenn alle

$$c_{i_1, i_2, \dots, i_k} := \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

bekannt sind. Das heißt, man kann genau $\binom{n}{k}$ Koeffizienten frei wählen und dies bedeutet $\Lambda^k(V^*)$ ist $\binom{n}{k}$ -dimensional.

Lemma 12.3 Für $\dim V = n$ hat man $\dim(\Lambda^k(V^*)) = \binom{n}{k}$.

Definition 12.4 Seien $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^m(V^*)$. Man definiert $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+m}(V^*)$ durch

$$(\omega \wedge \eta)(v^1, \dots, v^{k+m}) = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}_{k+m}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(k)}) \eta(v^{\sigma(k+1)}, \dots, v^{\sigma(k+m)}).$$

Hier sind Perm_{k+m} alle Permutationen von $\{1, \dots, k+m\}$ und nimmt man

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{bei einer geraden Permutation } \sigma, \\ -1 & \text{bei einer ungeraden Permutation } \sigma. \end{cases}$$

Man nennt $\omega \wedge \eta$ **das äußere Produkt** von ω und η .

Jede Permutation einer endlichen Menge kann man bekommen durch endlich viele Vertauschungen zweier Elementen. Ein Permutation heißt (un)gerade, wenn man eine (un)gerade Zahl von Vertauschungen braucht.

Beispiel 12.5 Für $\omega, \eta \in \Lambda^1(V^*)$ folgt

$$(\omega \wedge \eta)(v^1, v^2) = \omega(v^1)\eta(v^2) - \omega(v^2)\eta(v^1).$$

Für $\omega \in \Lambda^1(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^2(V^*)$ folgt

$$(\omega \wedge \eta)(v^1, v^2, v^3) = \omega(v^1)\eta(v^2, v^3) - \omega(v^2)\eta(v^1, v^3) + \omega(v^3)\eta(v^1, v^2).$$

Satz 12.6 (Rechenregel für das äußere Produkt) Sei $\omega_{(i)} \in \Lambda^k(V^*)$, $\eta \in \Lambda^\ell(V^*)$ und $\nu \in \Lambda^m(V^*)$. Es gilt:

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$;
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$;

$$3. (\omega \wedge \eta) \wedge \nu = \omega \wedge (\eta \wedge \nu).$$

Beispiel 12.7 Für $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Lambda^1(V^*)$ hat man

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)(v^1, v^2, v^3) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v^1) & \omega_1(v^2) & \omega_1(v^3) \\ \omega_2(v^1) & \omega_2(v^2) & \omega_2(v^3) \\ \omega_3(v^1) & \omega_3(v^2) & \omega_3(v^3) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt sofort aus der Definition. Für die zweite soll man bemerken, dass

$$(\eta \wedge \omega)(v^1, \dots, v^\ell, v^{\ell+1}, \dots, v^{\ell+k}) = (\omega \wedge \eta)(v^{\ell+1}, \dots, v^{\ell+k}, v^1, \dots, v^\ell)$$

und dass man mit $k\ell$ Vertauschungen (v^1, \dots, v^ℓ) vor $(v^{\ell+1}, \dots, v^{\ell+k})$ bekommt:

$$(\omega \wedge \eta)(v^{\ell+1}, \dots, v^{\ell+k}, v^1, \dots, v^\ell) = (-1)^{k\ell} (\omega \wedge \eta)(v^1, \dots, v^\ell, v^{\ell+1}, \dots, v^{\ell+k}).$$

Um die letzte Behauptung zu beweisen, muß man ein guter Buchhalter sein. Wenn man bedenkt, dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}_{k+m}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(k)}) \eta(v^{\sigma(k+1)}, \dots, v^{\sigma(k+m)}) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}_{k+m} \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+m)}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(k)}) \eta(v^{\sigma(k+1)}, \dots, v^{\sigma(k+m)}), \end{aligned}$$

bemerkt man, dass die Definition nur davon abhängt, welche k Kugeln sich in dem ω -Beutel und welche m -Kugeln sich in dem η -Beutel befinden. Es wird über diese Verteilungen summiert und nicht über die Folge in jedem Beutel. Weil es für die Verteilung egal ist, ob man erst in Häufchen mit $k+\ell$ und m Kugeln verteilt und dann das $k+\ell$ Häufchen nochmals in ein k und in ein ℓ Häufchen aufteilt, oder gleich in drei Häufchen mit k , ℓ und m Kugeln, gilt

$$\begin{aligned} & ((\omega \wedge \eta) \wedge \nu)(v^1, \dots, v^{k+\ell+m}) = \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Perm}_{k+\ell+m} \\ \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+\ell) \\ \sigma(k+\ell+1) < \sigma(k+\ell+2) < \dots < \sigma(k+\ell+m)}} \text{sgn}(\sigma) \omega(v^{\sigma(1)}, \dots, v^{\sigma(k)}) \eta(v^{\sigma(k+1)}, \dots, v^{\sigma(k+\ell)}) \nu(v^{\sigma(k+\ell+1)}, \dots, v^{\sigma(k+\ell+m)}) \\ &= (\omega \wedge (\eta \wedge \nu))(v^1, \dots, v^{k+\ell+m}). \end{aligned}$$

■

Wir können sogar eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$ konstruieren. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für V und sei $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ der duale Basis für V^* wie in (12.1). Sei jetzt $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ein geordneter k -Tupel aus $\{1, \dots, n\}$; das heißt $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Wir definieren

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_k}. \quad (12.2)$$

Satz 12.8 $\{\varepsilon_I; I \text{ geordneter } k\text{-Tupel}\}$ mit ε_I definiert in (12.2) ist eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$.

Beweis. Man betrachte die Überlegungen bei Lemma 12.3. ■

Seien V und W Vektorräume über \mathbb{R} und sei $L : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Mit dieser linearen Abbildung L lässt sich eine lineare Abbildung $L^* : \Lambda^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(W^*)$ konstruieren:

$$(L^*\omega)(w^1, \dots, w^k) = \omega(Lw^1, \dots, Lw^k).$$

Notation 12.9 Man sagt, eine äußere Form ω auf V lässt sich mit einer linearen Abbildung $L : W \rightarrow V$ zurückziehen zu einer äußeren Form $L^*\omega$ in W .

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{L} & V \\ \Lambda^k(W^*) & \xleftarrow{L^*} & \Lambda^k(V^*) \end{array}$$

Schlussendlich wollen wir noch zeigen, dass ein inneres Produkt von einem Vektor $v \in V$ mit einer k -Form ω eine $(k-1)$ -Form liefert:

Definition 12.10 Sei $v \in V$ und $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ mit $k \geq 1$. Dann setzt man

$$(v \lrcorner \omega)(v^1, \dots, v^{k-1}) = \omega(v, v^1, \dots, v^{k-1}).$$

Man findet, dass $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{k-1}(V^*)$, denn die Multilinearität und die Antisymmetrie von $v \lrcorner \omega$ folgt aus der von ω .

12.2 Determinante

Die bekannteste äußere Form ist die Determinante. Für $V = \mathbb{R}^n$ ist

$$\{v^1, \dots, v^n\} \mapsto \det(v^1, \dots, v^n)$$

eine äußere n -Form, oder formell $\det \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$. Man sieht sofort, dass diese Abbildung multilinear und anti-symmetrisch ist. Man hat

$$\det() = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n.$$

Wir haben schon mal gesehen, dass $|\det(v^1, \dots, v^n)|$ das Volumen von dem Parallelepipid

$$P = \{\theta_1 v^1 + \dots + \theta_n v^n; \theta_i \in [0, 1]\}$$

ergibt.

12.3 Skalarprodukt und Orientierung

Bis jetzt sind wir nur dem Standardskalarprodukt begegnet. Wir möchten ein allgemeineres Skalarprodukt zulassen.

Definition 12.11 $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt, wenn

1. $v^1 \mapsto g(v^1, v^2)$ und $v^2 \mapsto g(v^1, v^2)$ linear sind;
2. g symmetrisch ist: $g(v^1, v^2) = g(v^2, v^1)$;

3. $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis ist für V und $M_B(g)$ die Matrix definiert durch $M_B(g)_{ij} = g(b_i, b_j)$, dann gilt
- $$\det(M_B(g)) \neq 0.$$

Weil g symmetrisch ist, ist $M_B(g)$ auch symmetrisch und darum diagonalisierbar. Nennen wir die Zahl der positiven Eigenwerte p und die Zahl der negativen q , dann ist das Paar (p, q) die **Signatur** des Skalarproduktes g auf der Basis B . Man kann zeigen, dass diese Signatur unabhängig von der gewählten Basis ist.

Für das Standardskalarprodukt $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf der Standardbasis E durch $g(v^1, v^2) = \langle v^1, v^2 \rangle$, ist $M_B(g)$ positiv definit. Man möchte hier auch Skalarprodukte zulassen, die auf Produktvektorräume $V \times W$ definiert sind durch

$$g \left(\begin{pmatrix} v^1 \\ w^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^2 \\ w^2 \end{pmatrix} \right) = \langle v^1, v^2 \rangle_V - \langle w^1, w^2 \rangle_W.$$

Ein Skalarprodukt g auf $V \times V$ liefert ein zugehöriges Skalarprodukt \bar{g} auf $V^* \times V^*$ durch

$$\bar{g}(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g^{ij} \alpha(e_i) \beta(e_j) \quad (12.3)$$

mit

$$(g^{ij})_{ij} = M_B(g)^{-1}. \quad (12.4)$$

Auf diese Art hängt \bar{g} nicht von der Wahl der Basis ab, sondern nur von g selbst, denn wenn $\tilde{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine andere Basis ist, sagen wir

$$f_i = \sum_{k=1}^n F_{ik} e_k$$

dann gilt, dass

$$M_{\tilde{B}}(g) = (g(f_i, f_j))_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n F_{ik} F_{j\ell} g(e_k, e_\ell) \right)_{ij} = F M_B(g) F^T$$

und es folgt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha(f_1) \\ \vdots \\ \alpha(f_n) \end{pmatrix} \cdot M_{\tilde{B}}(g)^{-1} \begin{pmatrix} \beta(f_1) \\ \vdots \\ \beta(f_n) \end{pmatrix} = \\ & = \left(F \begin{pmatrix} \alpha(e_1) \\ \vdots \\ \alpha(e_n) \end{pmatrix} \right)^T (F M_B(g) F^T)^{-1} F \begin{pmatrix} \beta(e_1) \\ \vdots \\ \beta(e_n) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \alpha(e_1) \\ \vdots \\ \alpha(e_n) \end{pmatrix} \cdot M_B(g)^{-1} \begin{pmatrix} \beta(e_1) \\ \vdots \\ \beta(e_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieser letzte Formel ist genau $\bar{g}(\alpha, \beta)$ wie in (12.3) und man sieht, dass die Definition in (12.3) nicht von der Basis abhängt.

Lemma 12.12 Sei $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt und sei $v \in V$. Wenn $g(v, w) = 0$ für alle $w \in V$, dann gilt $v = 0$.

Beweis. Weil $M_B(g)$ symmetrisch ist und $\det(M_B(g)) \neq 0$, kann man ein Basis \tilde{B} finden derart, dass

$$M_{\tilde{B}}(g) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $d_{11}, \dots, d_{pp} > 0$ und $d_{p+1,p+1}, \dots, d_{p+q,p+q} < 0$. Wenn $(v_1, \dots, v_p) \neq 0$ gilt, nimmt man auf diese Basis $w = (v_1, \dots, v_p, 0, \dots, 0)$ und es folgt, dass $g(v, w) > 0$, einen Widerspruch. Wenn $(v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \neq 0$ gilt, nimmt man $w = (0, \dots, 0, v_{p+1}, \dots, v_{p+q})$ und es folgt, dass $g(v, w) < 0$, wiederum einen Widerspruch. ■

Dieses Skalarprodukt wird wie folgt erweitert auf die Räume $\Lambda^k(V^*)$:

Definition 12.13 Sei $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt und $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis für V . Dann definiert man $\bar{g} : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^k(V^*) \rightarrow \mathbb{R}$, mit g^{ij} wie in (12.4), wie folgt:

$$\bar{g}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n}} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_k j_k} \omega_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega_2(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

für $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(V^*)$. NB: Auch hier hängt \bar{g} nicht von der Basis ab.

In \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 können wir uns eine Vorstellung davon machen, was wir unter einer rechts oder links orientierten Basis verstehen. In höheren Dimensionen haben wir keine Vorstellung, die uns dabei helfen würde, links oder rechts zu unterscheiden. Wir können aber schon alle Basen in zwei Klassen aufteilen. Wenn $B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $B_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$ zwei verschiedene Basen sind, dann gibt es eine Matrix $A = (a_{ij})$, die B_1 überführt in B_2 :

$$f_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n.$$

Wenn $\det(A) > 0$ sagen wir, dass B_1 und B_2 gleich orientiert sind; wenn $\det(A) < 0$ nennt man B_1 und B_2 entgegengesetzt orientiert.

Lemma 12.14 Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgeartetem Skalarprodukt g . Dann kann man eine Basis B definieren derart, dass

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.5)$$

Beweis. Weil g symmetrisch ist, kann man eine orthonormale Basis \tilde{B} finden, die $M_{\tilde{B}}(g)$ diagonal macht. Skaliert man das i -te Basiselement von \tilde{B} durch $|(M_{\tilde{B}}(g))_{ii}|^{1/2}$ und nimmt man dies als neues Basiselement, wird der dazugehörige Diagonaleintrag zu ± 1 . ■

Definition 12.15 Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g und sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis mit $M_B(g)$ wie in (12.5). Dann nennt man $dV \in \Lambda^n(V^*)$, definiert durch

$$dV(v^1, \dots, v^n) = \det \begin{pmatrix} g(v^1, e_1) & \cdots & g(v^n, e_1) \\ \vdots & & \vdots \\ g(v^1, e_n) & \cdots & g(v^n, e_n) \end{pmatrix},$$

die Volumenform zu g .

Bemerkung 12.15.1 Diese Volumenform ist nicht ganz unabhängig von der gewählten Basis. Für alle Basen die gleich orientiert sind bekommt man die gleiche Form. Ist eine Basis gegengesetzt orientiert, so findet man zusätzlich ein Minus-Zeichen. Wenn man zum Beispiel e_1 und e_2 vertauscht, passiert dies schon.

Wenn $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ die duale Basis auf V^* zu B ist, das heißt $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, dann gilt

$$dV = (-1)^q \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n. \quad (12.6)$$

Um (12.6) zu zeigen bemerke man, dass es reicht, wenn man (12.6) für Basisvektoren beweist. Weil $\dim(\Lambda^n(V^*)) = 1$ gilt, hat eine Basis für $\Lambda^n(V^*)$ genau ein Element und das kann zum Beispiel das n -Tupel (e_1, \dots, e_n) sein. Es gilt

$$dV(e_1, \dots, e_n) = \det(g(e_i, e_j)_{ij}) = (-1)^q = (-1)^q (\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_n)(e_1, \dots, e_n).$$

12.4 Hodge-Operator

Für den n -dimensionalen Vektorraum gilt

$$\dim(\Lambda^m(V^*)) = \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \dim(\Lambda^{n-m}(V^*)).$$

Definition 12.16 Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g und sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis mit $M_B(g)$, wie in (12.5). Man definiert den Hodge-Operator $*$: $\Lambda^m(V^*) \rightarrow \Lambda^{n-m}(V^*)$ wie folgt. Für $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ ist $*\omega \in \Lambda^{n-m}(V^*)$ die eindeutige $(n-m)$ -Form derart, dass

$$\omega \wedge \eta = \bar{g}(*\omega, \eta) dV \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

Dieser Hodge-Operator ist wohldefiniert und das sieht man wie folgt. Für $\omega \in \Lambda^m(V^*)$ und $\eta \in \Lambda^{n-m}(V^*)$ gilt $\omega \wedge \eta \in \Lambda^n(V^*)$. Außerdem ist für jedes $\eta \in \Lambda^{n-m}(V^*)$ die Abbildung

$$(\eta \mapsto \omega \wedge \eta) \in L(\Lambda^{n-m}(V^*); \Lambda^n(V^*))$$

linear. Weil $\Lambda^n(V^*)$ eindimensional ist, und die Volumenform dV eine Basis für $\Lambda^n(V^*)$ liefert, gibt es $c \in \mathbb{R}$, also eine lineare Abbildung von $\Lambda^{n-m}(V^*)$ nach \mathbb{R} , mit

$$\omega \wedge \eta = c(\eta) dV \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

Weil \bar{g} ein nicht-ausgeartetes Skalarprodukt auf $\Lambda^{n-m}(V^*)$ ist, gibt es wegen Lemma 12.12 genau eine Form $\nu \in \Lambda^{n-m}(V^*)$ mit

$$c(\eta) = \bar{g}(\nu, \eta) \text{ für alle } \eta \in \Lambda^{n-m}(V^*).$$

So sieht man, dass $*\omega := \nu$ wohldefiniert ist.

Lemma 12.17 Sei V ein Vektorraum mit einem nicht-ausgearteten Skalarprodukt g und sei $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis mit $M_B(g)$, wie in (12.5). Sei $\omega, \eta \in \Lambda^m(V^*)$. Dann gilt

1. für eine Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & & i_m & j_1 & \dots & j_{n-m} \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

mit $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-m}$:

$$*(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}) = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{j_1 j_1} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} (\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}});$$

2. $**\omega = (-1)^{m(n-m)+q} \omega$;

3. $\bar{g}(*\omega, *\eta) = (-1)^q \bar{g}(\omega, \eta)$.

Beweis. (1) Wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{n-m}\}$ keine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist, dann gibt es zweimal die gleiche Zahl und es folgt

$$\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}} = 0.$$

Wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{n-m}\}$ schon eine Permutation von $\{1, \dots, n\}$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}} = \\ & = \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) dV. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Man kann daraus schließen, dass

$$*(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}) = c \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}.$$

Weil

$$\bar{g}(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}, \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) = g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}}$$

und $g^{j_k j_k} \in \{-1, +1\}$ gilt, folgt für

$$c = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}},$$

dass

$$\begin{aligned} & \bar{g}(*(\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}), \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) dV = \\ & = c \bar{g}(\varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}, \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}) dV = \\ & = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) (g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}})^2 dV = (-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) dV = \\ & = \operatorname{sgn}(\sigma) \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n = \\ & = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m} \wedge \varepsilon_{j_1} \wedge \varepsilon_{j_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{j_{n-m}}. \end{aligned}$$

(2) Für $\omega = \varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_m}$ mit $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ und J das Komplement zu I , mit der Standardanordnung so wie es auch in (12.8) definiert ist, und mit

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-m & n-m+1 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{n-m} & i_1 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

gilt, dass

$$\begin{aligned} **\varepsilon_I &= * \left((-1)^q \operatorname{sgn}(\sigma) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} \varepsilon_J \right) = \\ &= (-1)^{2q} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} g^{i_1 i_1} g^{i_2 i_2} \dots g^{i_m i_m} \varepsilon_I = \\ &= (-1)^{(n-m)m} (-1)^q \varepsilon_I. \end{aligned}$$

Man verwendet, dass $\operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) = (-1)^{(n-m)m}$ und

$$g^{j_1 j_1} g^{j_2 j_2} \dots g^{j_{n-m} j_{n-m}} g^{i_1 i_1} g^{i_2 i_2} \dots g^{i_m i_m} = 1^p (-1)^q.$$

Weil $\{\varepsilon_I; I \text{ geordneter } m\text{-Tupel}\}$ eine Basis für $\Lambda^m(V^*)$ bildet, ist der Beweis fast komplett. Man muss sich nur noch überlegen, dass mit zusätzliche Funktionen f_I gilt:

$$* \left(\sum_{|I|=m} f_I \varepsilon_I \right) = \sum_{|I|=m} f_I (*\varepsilon_I).$$

(3) Sei $\omega, \eta \in \Lambda^m(V^*)$. Dann gilt mit dem zweiten Ergebnis oben, dass

$$\begin{aligned} \bar{g}(*\omega, *\eta) dV &= \omega \wedge (*\eta) = (-1)^{(n-m)m} (*\eta) \wedge \omega = \\ &= (-1)^{(n-m)m} \bar{g}(**\eta, \omega) dV = (-1)^q \bar{g}(\eta, \omega) dV = (-1)^q \bar{g}(\omega, \eta) dV. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel 12.18 Für $M = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasen und dem standard skalaren Produkt ist dieser Hodge-Operator nur halb so schlimm. Für

$$\omega = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_m} \text{ mit } I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$$

und $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ findet man

$$*\omega = (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma)} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-m}}$$

mit σ wie in (12.7). Dann folgt auch sofort, weil $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, dass

$$**\omega = \omega. \quad (12.9)$$

12.5 Differentialformen zurückziehen und ableiten

Für die Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in \mathbb{R}^n definiert man $dx_i \in \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$ für $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ durch

$$dx_i(v) = v_i.$$

Eine Basis für $\Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ ist dann

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}.$$

Das wiederum heißt, dass jede äußere k -Form ω die Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (12.10)$$

hat. Wenn $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \in C^\ell(U)$ für $U \subset \mathbb{R}^n$, nennt man ω eine k -Form der Klasse C^ℓ und schreibt $\omega \in \Omega_k^\ell(U)$.

Definition 12.19 Das **Differential** von $f \in C^{k+1}(U)$ mit $k \geq 1$ für offenes $U \subset \mathbb{R}^n$ definiert man durch

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Es folgt $df \in \Omega_k^1(U)$ und für $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$ gilt

$$df(v) = \nabla f \cdot v.$$

Genauer wäre es, wenn man schreiben würde $df(p, v) = \nabla f(p) \cdot v$.

Definition 12.20 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{\ell+1}(U; \mathbb{R}^m)$. Man definiert für $\omega \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$ die **von f zurückgezogene k -Form** $f^*(\omega) \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^n)$ durch

$$f^*(\omega)(v^1, \dots, v^k) = \omega(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k).$$

Bemerkung 12.20.1 Wenn man die Abhängigkeit von der Stelle nach beibehalten möchte, dann müsste man eigentlich schreiben $f^*(\omega)_{[p]}(v^1, \dots, v^k) = \omega_{[f(p)]}(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k)$, denn die Differentialform ω an der Stelle $f(p)$ hängt zusammen mit der Differentialform $f^*(\omega)$ an der Stelle p . Deshalb sagt man auch „zurückziehen“.

Hier ist $f'(p)$ die Ableitung von f an der Stelle p , anders gesagt, die lineare Abbildung $f'(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, ist also als eine $m \times n$ -Matrix darstellbar, mit

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\|f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)\|}{\|x - p\|} = 0.$$

Es folgt, dass

$$f^*(dx_i)(v) = dx_i(f'(p)v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} v_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} dx_j(v). \quad (12.11)$$

Lemma 12.21 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{\ell+1}(U; \mathbb{R}^m)$. Dann gilt:

1. $f^*(\omega + \eta) = f^*(\omega) + f^*(\eta)$ für $\omega, \eta \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$;
2. $f^*(g\omega) = (g \circ f)^* f^*(\omega)$ für $\omega \in \Omega_\ell^k(\mathbb{R}^m)$ und $g \in C^0(\mathbb{R}^m)$;
3. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$ für $\omega \in \Omega_\ell^{k_1}(\mathbb{R}^m)$ und $\eta \in \Omega_\ell^{k_2}(\mathbb{R}^m)$.

Beweis. Diese Aussagen folgen sofort aus der Definition. ■

Aus der letzten Aussage und (12.11) folgt für den speziellen Fall $m = n$, dass

$$\begin{aligned} f^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) &= f^*(dx_1) \wedge f^*(dx_2) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_j} dx_j \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_j} dx_j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_j} dx_j = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Pert}} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{\sigma_1}} \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{\sigma_2}} \cdots \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_{\sigma_n}} dx_{\sigma_1} \wedge dx_{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Pert}} \text{sgn}(\sigma) \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_{\sigma_1}} \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_{\sigma_2}} \cdots \frac{\partial f_n(p)}{\partial x_{\sigma_n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \\ &= \det(f'(p)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Definition 12.22 Sei $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ mit $\ell \geq 1$ wie in (12.10):

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (12.12)$$

Das äußere Differential $d\omega$ definiert man durch

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Es folgt $d\omega \in \Omega_{\ell-1}^{k+1}(U)$. Das heißt, d ist ein linearer Operator von $\Omega_\ell^k(U)$ zu $\Omega_{\ell-1}^{k+1}(U)$.

Lemma 12.23 Es gilt:

1. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$ für $\omega, \eta \in \Omega_\ell^k(U)$ mit $\ell \geq 1$;
2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k_1} \omega \wedge d\eta$ für $\omega \in \Omega_\ell^{k_1}(U)$ und $\eta \in \Omega_\ell^{k_2}(U)$ mit $\ell \geq 1$;
3. $dd\omega = 0$ für $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ mit $\ell \geq 2$;
4. $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$ für $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ und $\omega \in \Omega_\ell^k(U)$ mit $\ell \geq 1$

Beweis. Das erste Ergebnis zeigt man sofort mit Hilfe der Definition.

Nehmen wir Teilmengen $I, J \subset \{1, \dots, n\}$ und schreiben

$$\begin{aligned} dx_I &= dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad \text{für } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \\ dx_J &= dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \quad \text{für } J = \{j_1, \dots, j_\ell\}, \end{aligned}$$

dann bemerke man für das zweite Ergebnis, dass

$$\begin{aligned} d(f dx_I \wedge g dx_J) &= d(f g dx_I \wedge dx_J) = \\ &= (g df + f dg) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= df \wedge dx_I \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge dg \wedge dx_J = \\ &= d(f dx_I) \wedge g dx_J + (-1)^k f dx_I \wedge d(g dx_J). \end{aligned}$$

Für das dritte Ergebnis bemerke man, dass

$$\begin{aligned} d(d(f dx_I)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_I = 0. \end{aligned}$$

Das letztere folgt aus der Definition. Nennen wir $\{y_1, \dots, y_m\}$ die Koordinaten auf \mathbb{R}^m und sei $\omega = g dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$. Es gilt

$$d\omega = dg \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$$

und weil

$$\begin{aligned} f^*(\omega)_{[p]}(v^1, \dots, v^k) &= \omega_{[f(p)]}(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k) \\ &= g_{[f(p)]}(dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega)_{[p]})(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) &= d(g_{[f(p)]} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)_{[f(p)]} dy_i \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k} \right) (f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)_{[f(p)]} (dy_i \circ f'(p)) \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p)) \right) (v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)_{[f(p)]} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{[p]} dx_j \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p)) \right) (v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j} \right)_{[p]} dx_j \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p)) \right) (v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\ &= (d(g \circ f)_{[p]} \wedge (dy_{j_1} \circ f'(p)) \wedge \dots \wedge (dy_{j_k} \circ f'(p)))(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}) \\ &= (dg_{[f(p)]} \wedge dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k})(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\ &= d\omega_{[f(p)]}(f'(p)v^1, \dots, f'(p)v^k, f'(p)v^{k+1}) \\ &= (f^*(d\omega))_{[p]}(v^1, \dots, v^k, v^{k+1}). \end{aligned}$$

■

12.6 Wieso?

Warum all dieses? Wir möchten das Werkzeug bereitlegen, um auch bei Mannigfaltigkeiten zugehörige Integrale auf passende Weise festzulegen und gegebenenfalls auch zu berechnen. Verwendet man Differentialformen, dann sieht die allgemeine Form des Satzes von Stokes harmlos aus:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Hier ist M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n mit $(m-1)$ -dimensionalem Rand ∂M und $\omega \in \Omega_{\ell+1}^{m-1}(M)$. In einer Dimension sieht dieser Satz übrigens wie folgt aus:

$$\int_a^b d\omega = \omega(b) - \omega(a).$$

12.7 Gradient, Divergenz und Rotation in \mathbb{R}^n

Bevor wir uns auf Mannigfaltigkeiten begeben, erinnern wir nochmal an einige Differentialoperatoren in \mathbb{R}^n .

Definition 12.24 • Der Gradient für $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

• Die Divergenz für $v \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

• Die Rotation für $v \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^n)$:

$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & v_1 & e_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & v_2 & e_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & v_3 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Auf englisch: $\operatorname{rot} v = \operatorname{curl} v$.

• Der Laplace-Operator für $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 f + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f.$$

12.8 Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

Der allgemeine Satz von Stokes liefert einige Spezialfälle, die wir hier betrachten werden.

Man nennt das Dreibein $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathbb{R}^3$ positiv orientiert, wenn $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0$.

Lemma 12.25 Wenn $\psi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion ist, $M = \psi(A)$ eindeutig parametrisiert ist, und wenn v ein Vektorfeld auf M ist und $d\sigma$ das Oberflächendifferential, dann gilt

$$\iint_M v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_A (v \circ \psi)(x, y) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy.$$

Das Dreibein $\left\{ \mathbf{n}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}$ soll positiv orientiert sein; \mathbf{n} ist ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf M .

Das Oberflächendifferential gehört zu der positiven Volumenform auf M , die wir später noch genau definieren wollen.

Satz 12.26 (Gauß¹ in 3 Dimensionen) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in C^1$. Sei $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$ und sei \mathbf{n} der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $d\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iiint_U \nabla \cdot v \, d\lambda = \iint_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Satz 12.27 (Gauß in n Dimensionen) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in C^1$. Sei $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ und sei \mathbf{n} der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $d\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \nabla \cdot v \, d\lambda = \int_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Korollar 12.28 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in C^1$. Sei $f, g \in C^2(\bar{U})$ und sei \mathbf{n} der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $d\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U ((\Delta f)g - f(\Delta g)) \, d\lambda = \int_{\partial U} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

N.B. $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$.

Bemerkung 12.28.1 Dieses Korollar ist auch bekannt als ein Satz von Green².



Abbildung 12.1: Gauß, die Mühle von Green und Stokes.

Satz 12.29 (Stokes³ klassisch) Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 . Sei $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$ und sei \mathbf{n} ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf M und $d\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iint_M (\nabla \times v(x)) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\partial M} v(x) \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds,$$

wobei der Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ sich zu \mathbf{n} links herum dreht. N.B. $\nabla \times v = \text{rot } v$.

Siehe auch Abbildung 12.2.

¹Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

²George Green, 1793 – 1841

³George Gabriel Stokes, 1819 – 1903

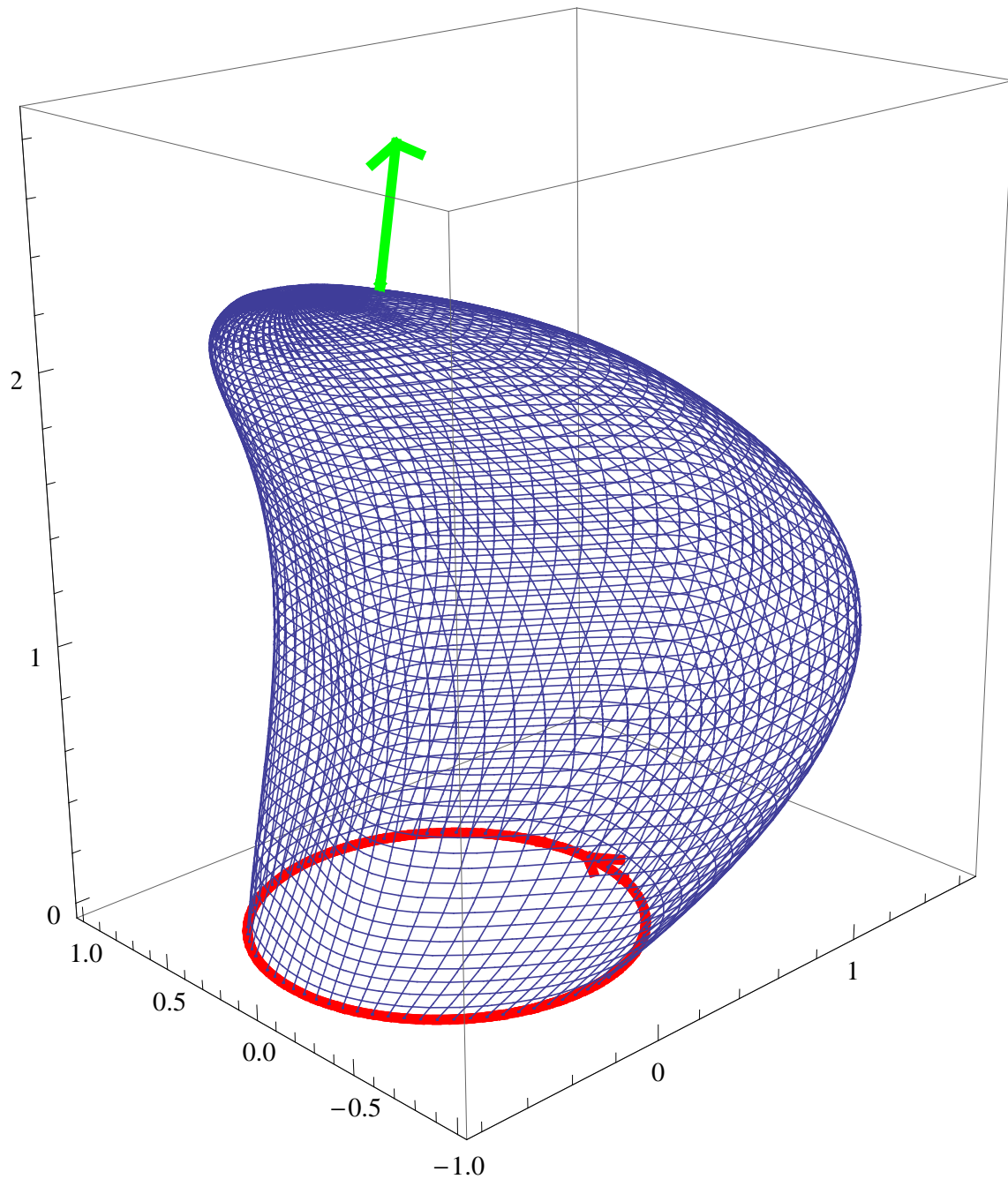


Abbildung 12.2: Eine Abbildung zu Satz 12.29: M als graues Haarnetz, ∂M und $\boldsymbol{\tau}$ in rot und ein \mathbf{n} in grün.

Analysis 3, Woche 13

Differentialformen II



13.1 Geschlossene und exakte Differentialformen

Definition 13.1 Eine k -Form $\omega \in \Omega_1^k(U)$ heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$.

Eine k -Form $\omega \in \Omega_1^k(U)$ heißt exakt, wenn $\eta \in \Omega_2^{k-1}(U)$ existiert mit $d\eta = \omega$.

Weil $dd\omega = 0$ gilt, ist jede exakte k -Form in $\Omega_1^k(U)$ auch geschlossen.

Satz 13.2 (Das Lemma von Poincaré) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und offen. Für jede geschlossene k -Form $\omega \in \Omega_1^k(U)$ gibt es eine $(k+1)$ -Form $\eta \in \Omega_1^{k+1}(U)$ mit $d\eta = \omega$.

Bemerkung 13.2.1 Ein Gebiet U heißt sternförmig, wenn es $a \in U$ gibt derart, dass für jedes $x \in U$ gilt, dass $[a, x] \subset U$.

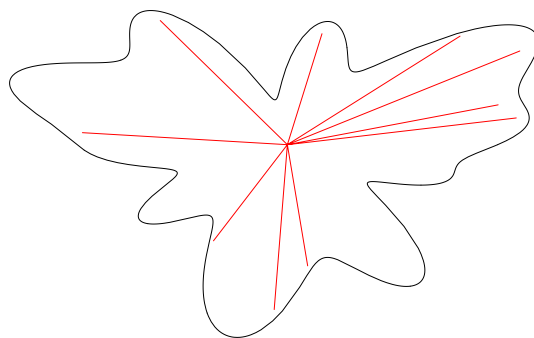


Abbildung 13.1: Ein sternförmiges Gebiet.

Beweis. Sei

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Wir definieren

$$p\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt \right) x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Bemerke, dass hier angenommen wird, dass das Intervall $[0, x]$ innerhalb U liegt. Das heißt, U ist sternförmig mit 0 als Zentrum. Nur so ist $\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt$ wohldefiniert. Bei einem anderen Zentrum benutze man eine zusätzliche Verschiebung.

Es folgt

$$\begin{aligned} d(p\omega) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_\ell} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Ähnlich gilt für

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

dass

$$\begin{aligned} p(d\omega) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_\ell} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \\ &\quad - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\ell} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \\ &\quad \dots \wedge dx_{i_{\ell-1}} \wedge dx_{i_{\ell+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Addiert man (13.2) und (13.3), dann findet man

$$\begin{aligned} d(p\omega) + p(d\omega) &= \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(k \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x_j}(tx) dt x_j \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (t^k \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \omega. \end{aligned}$$

Wenn ω geschlossen ist, hat man $d\omega = 0$, es folgt $p(d\omega) = 0$ und auch $\omega = d(p\omega)$. ■

13.2 Standardvolumen

Wir haben schon zu einem Skalarprodukt g auf einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^n die Volumenform $dV \in \Lambda^m(T_x M)$ an jeder Stelle $x \in M$ definiert. Wenn man

das Standardskalarprodukt nimmt, das heißt für eine Basis $\{e_1, \dots, e_m\} \subset T_x M \subset \mathbb{R}^n$ gilt $g(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, schreibt man dM für diese Volumenform¹.

Hier ist g das Skalarprodukt auf $T_x M$ und \cdot das Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Das m -dimensionale Volumen vom Parallelepiped

$$P = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq m} \theta_i v^i; 0 \leq \theta_i \leq 1 \right\}$$

ist, mit den Koordinaten $[v^i]_e$ auf e -Basis:

$$\text{Vol}_m(P) = |\det([v^1]_e, \dots, [v^m]_e)| = \left| \det \begin{pmatrix} v^1 \cdot e_1 & \cdots & v^m \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v^1 \cdot e_m & \cdots & v^m \cdot e_m \end{pmatrix} \right|.$$

Weil eine Differentialform multilinear ist, und wir diese Struktur erhalten wollen, werden wir den Betrag nicht einschließen und wir setzen:

$$dM(v^1, \dots, v^m) = \det \begin{pmatrix} v^1 \cdot e_1 & \cdots & v^m \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ v^1 \cdot e_m & \cdots & v^m \cdot e_m \end{pmatrix},$$

anders gesagt, wenn $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ dual zu $\{e_1, \dots, e_m\}$ ist:

$$dM = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \cdots \wedge \varepsilon_m.$$

Man bemerke, dass dM so nur definiert ist an der Stelle x , weil $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Basis für $T_x M$ bildet. An jeder Stelle x könnte man beliebig eine Basis definieren und beliebige Vorzeichenwechsel bei der Determinante bekommen. Das wäre nicht sehr schön. Wir werden uns bemühen, dass die Abbildung $x \mapsto dM_x$ eine stetige Funktion ist.

Wenn $\psi : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $M = \psi(U)$ eine reguläre Parametrisierung ist, kann man dM zurückziehen auf U und bekommt

$$\begin{aligned} \psi^*(dM) &= (\varepsilon_1 \circ \psi') \wedge (\varepsilon_2 \circ \psi') \wedge \cdots \wedge (\varepsilon_m \circ \psi') \\ &= f d\mathbb{R}^m = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m, \end{aligned} \quad (13.4)$$

wo man sich nur noch überlegen sollte, wie die Funktion f zu definieren wäre. Siehe Abbildung 13.2.

Um eine passende m -Form in (13.4) zu bekommen, anders gesagt, um die Funktion f zu bestimmen, gehen wir voran wie bei Definition 10.14. Da findet man, dass $f(y) = \det([\psi']_e)$ passt, mit $[\psi']_e$ die Vektoren $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_m}$ in e -Koordinaten geschrieben:

$$\begin{aligned} f(y) &= \det([\psi']_e) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_1 & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_m & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_m \end{pmatrix} = \\ &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_1 & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_m \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_1 & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_m \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_1 & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_m & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_m \end{pmatrix}} = \end{aligned}$$

¹Die Notation dM ist so üblich und bedeutet nicht, dass dM die Ableitung einer $(m-1)$ -Form M ist.

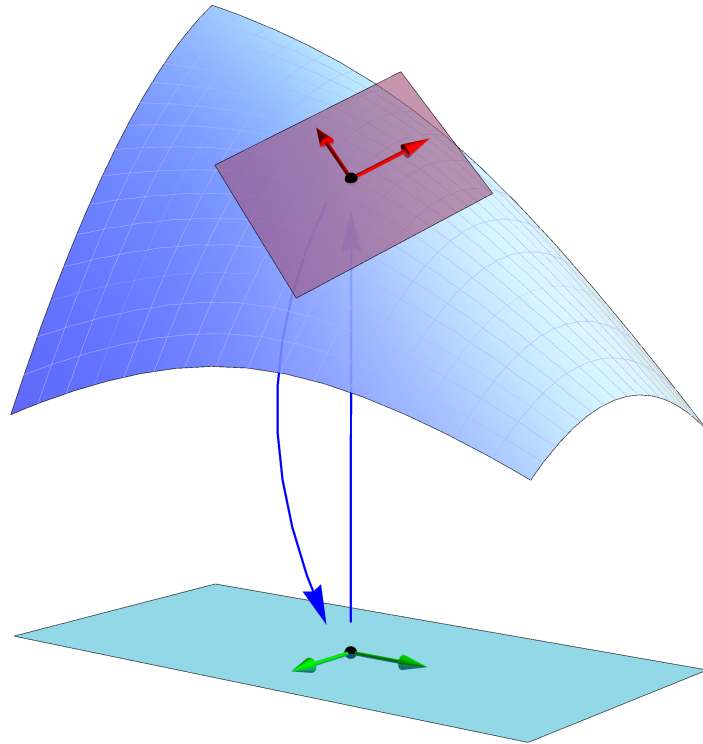


Abbildung 13.2: In rot eine Basis $\{e_1, e_2\}$ für $T_p M$ und in grün der Standardbasis in \mathbb{R}^2 ; ψ geht hinauf und ψ^* zieht der Differentialform $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$ zurück zu $f dx_1 \wedge dx_2$.

$$\begin{aligned}
 &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_i \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_i \right) & \cdots & \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_i \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_i \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_i \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot e_i \right) & \cdots & \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_i \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot e_i \right) \end{pmatrix}} = \\
 &= \pm \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_m} \end{pmatrix}}.
 \end{aligned}$$

Diese letzte Formel ist unabhängig von der lokalen Basis $\{e_1, \dots, e_m\}$. Das Vorzeichen hängt ab von der Orientierung der Parametrisierung. Nehmen wir an $f > 0$, und setzen für Standardkoordinaten

$$\int_U F(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_m := \int_U F(x) dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

dann kann man das Integral von g über die Mannigfaltigkeit M durch zurückziehen definieren:

$$\begin{aligned}
 \int_M g dM &= \int_U (g \circ \psi) \psi^*(dM) = \\
 &= \int_U (g \circ \psi) \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)} dx_1 dx_2 \dots dx_m.
 \end{aligned}$$

Lemma 13.3 Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und sei dM die Volumenform. Sei $N \subset M$ eine $(m-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Nehme an $\mathbf{n}(x) \in T_x M$ ist ein Normaleneinheitsvektor zu $T_x N$, das heißt $\mathbf{n}(x) \cdot v = 0$ für alle $v \in T_x N$ und $\mathbf{n}(x) \cdot \mathbf{n}(x) = 1$. Dann ist

$$dN = (\mathbf{n} \lrcorner dM)|_{TN}$$

eine Volumenform auf N .

Bemerkung 13.3.1 Wenn man eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M einschränkt, bekommt man meistens einen Rand, der eine $m-1$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Dieses Lemma gibt eine Möglichkeit beide zugehörige Volumenformen zu vergleichen.

Bemerkung 13.3.2 Auch $-\mathbf{n}(x)$ hat die gleichen Eigenschaften und die zugehörige Volumenform wäre $-(\mathbf{n} \lrcorner dM)|_{TM}$. Wenn man keine Orientierung festlegt, hat man a-priori genau diese zwei Möglichkeiten. Eigentlich gibt es immer zwei Volumenformen, die sich dann aber auch nur unterscheiden durch das Vorzeichen.

Bemerkung 13.3.3 Wenn $N \subset M$ eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ist mit $k < m$, dann gibt es $m-k$ Vektoren $\mathbf{n}_1(x), \dots, \mathbf{n}_{m-k}(x)$, die eine orthogonale Basis für $T_x N$ erweitern zu einer Basis für $T_x M$ und $dN = (\mathbf{n}_1 \lrcorner \mathbf{n}_2 \lrcorner \dots \lrcorner \mathbf{n}_{m-k} \lrcorner dM)|_{TN}$.

Beweis. Sei $\{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}$ eine orthonormale Basis für $T_x N$. Dann kann man diese Basis mit $\mathbf{n}(x)$ erweitern und findet mit $\{\mathbf{n}(x), e_1, \dots, e_{m-1}\}$ eine orthonormale Basis für $T_x N$. Es gilt für $v^i \in T_x N$ mit $i = 1, \dots, m-1$, dass

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} \lrcorner dM)(v^1, \dots, v^{m-1}) = dM(\mathbf{n}, v^1, \dots, v^{m-1}) = \\ & = \det \begin{pmatrix} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} & v^1 \cdot \mathbf{n} & \dots & v^{m-1} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \cdot e_1 & v^1 \cdot e_1 & \dots & v^{m-1} \cdot e_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{n} \cdot e_{m-1} & v^1 \cdot e_{m-1} & \dots & v^{m-1} \cdot e_{m-1} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v^1 \cdot e_1 & \dots & v^{m-1} \cdot e_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & v^1 \cdot e_{m-1} & \dots & v^{m-1} \cdot e_{m-1} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} v^1 \cdot e_1 & \dots & v^{m-1} \cdot e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v^1 \cdot e_{m-1} & \dots & v^{m-1} \cdot e_{m-1} \end{pmatrix} = dN(v^1, \dots, v^{m-1}). \end{aligned}$$

■

13.3 Grad, Div und Rot auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Paragraph ist M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n .

Definition 13.4 Für ein Vektorfeld $v : M \rightarrow TM$ wird die zum Vektorfeld duale Differentialform ω_v vom Grad 1 definiert durch

$$*\omega_v = v \lrcorner dM. \quad (13.5)$$

Bemerkung 13.4.1 Weil der Hodge-Operator bijektiv ist, ist diese Definition eindeutig. Umgekehrt gilt auch, dass es zu jeder 1-Form ω genau ein Vektorfeld $v : M \rightarrow TM$ gibt derart, dass $v \lrcorner dM = * \omega$ gilt.

Für $M = \mathbb{R}^m$ mit der Standardbasis $\{e_1, \dots, e_m\}$ und mit $\{dx_1, \dots, dx_m\}$ als der dazugehörigen Dualbasis, findet man

$$\begin{aligned} v \lrcorner dM &= (v_1 e_1 + \dots + v_m e_m) \lrcorner dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \\ &= v_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m - v_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_m + \dots + (-1)^{m-1} v_m dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1} \\ &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} v_i dx_{\{i\}^c} \quad \text{mit } dx_{\{i\}^c} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_m \end{aligned}$$

und weil hier $* dx_{\{i\}^c} = (-1)^{i-1} dx_i$ gilt, folgt

$$\omega_v = ** \omega_v = *(v \lrcorner dM) = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \dots + v_m dx_m. \quad (13.6)$$

Definition 13.5 Für $f \in C^1(M; \mathbb{R})$ wird der **Gradient** $\text{grad } f : M \rightarrow TM$ definiert durch

$$\omega_{\text{grad } f} = df.$$

Die Form df hat Grad 1. Für den Standardfall $M = \mathbb{R}^m$, wie auch oben, folgt

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

und mit (13.6) findet man den Gradienten für den Standardfall wie in Definition 12.24, nämlich

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m} \right).$$

Definition 13.6 Für $v \in C^1(M; TM)$ wird die **Divergenz** $\text{div } v : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(v \lrcorner dM) = (\text{div } v) dM.$$

Weil dM eine m -Form ist, ist $v \lrcorner dM$ eine $(m-1)$ -Form und $d(v \lrcorner dM)$ wieder eine m -Form. Weil die äußeren m -Formen auf $T_x^* M$ mit m -dimensionalem M an sich ein ein-dimensionaler Raum bilden, gibt es genau eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(v \lrcorner dM) = f dM$ und diese Funktion nennt man $\text{div } v$.

Definition 13.7 Sei $m = 3$ (also M ist eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit) und $v \in C^1(M; TM)$. Dann wird die **Rotation** $\text{rot } v : M \rightarrow TM$ definiert durch

$$*\omega_{\text{rot } v} = d\omega_v.$$

Nehme $M = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ und M^* mit der Standardbasis $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$. Dann folgt via (13.6) für $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, dass

$$\begin{aligned} d\omega_v &= d(v_1dx_1 + v_2dx_2 + v_3dx_3) = dv_1 \wedge dx_1 + dv_2 \wedge dx_2 + dv_3 \wedge dx_3 = \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Mit Beispiel 12.18 findet man

$$\begin{aligned} \omega_{\text{rot } v} &= **\omega_{\text{rot } v} = *d\omega_v = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_3 \end{aligned}$$

und folgt $\text{rot } v$ wie in Definition 12.24.

Lemma 13.8 Sei $m = 3$ (also M ist eine drei-dimensionale Mannigfaltigkeit) und $f \in C^2(M; \mathbb{R})$ und $v \in C^2(M; TM)$. Dann gilt

1. $\text{div}(\text{rot } v) = 0$;
2. $\text{rot}(\text{grad } f) = (0, 0, 0)$.

Beweis. Man verwende das dritte Ergebnis von Lemma 12.23 und findet:

$$\text{div}(\text{rot } v) dM = d(\text{rot } v \lrcorner dM) = d(*\omega_{\text{rot } v}) = dd\omega_v = 0.$$

Das zweite Ergebnis folgt aus $*\omega_{\text{rot}(\text{grad } f)} = d\omega_{\text{grad } f} =ddf = 0$. ■

Lemma 13.9 Sei U eine sternförmige offene Menge von \mathbb{R}^3 und $v \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$.

1. Wenn $\text{rot } v = 0$, dann existiert $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ mit $v = \text{grad } f$;
2. Wenn $\text{div } v = 0$, dann existiert $w \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ mit $v = \text{rot } w$.

Beweis. 1. Wenn $\text{rot } v = 0$, hat man $d\omega_v = 0$ und ω_v ist geschlossen. Poincaré sagt, dass eine Funktion f existiert mit $df = \omega_v$. Es gilt $v = \text{grad } f$.

2. Wegen der Annahme folgt $d(v \lrcorner dM) = (\text{div } v) dM = 0$. Dann ist die 2-Form $v \lrcorner dM$ geschlossen und mit Poincaré ist $v \lrcorner dM$ exakt und es gibt eine 1-Form ω derart, dass $d\omega = v \lrcorner dM$. Für eine differenzierbare 1-Form gibt es $w \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ derart, dass $\omega = \omega_w$. Weil

$$*\omega_{\text{rot } w} = d\omega_w = v \lrcorner dM = *\omega_v$$

gilt, folgt $\omega_{\text{rot } w} = \omega_v$ und $v = \text{rot } w$. ■

Analysis 3, Woche 14

Gauß und Stokes



14.1 Integration von Differentialformen

Wir nennen (ψ, U) mit $U \subset \mathbb{R}^m$ und $\psi : U \rightarrow M$ eine **reguläre Parametrisierung** der m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn $\psi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, $\psi(U) = M$, ψ im Innern von U eindeutig ist und $\psi|_{U^\circ}$ eine Immersion ist.

Definition 14.1 Sei $B := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ ein Block und sei $\psi \in C^1(B; \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Parametrisierung von M . Für $\omega \in \Omega_1^k(M)$ gibt es genau ein $f \in C(B)$ mit

$$\psi^*(\omega) = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

und man setzt

$$\int_{M, \psi} \omega = \int_B f d\lambda_k.$$

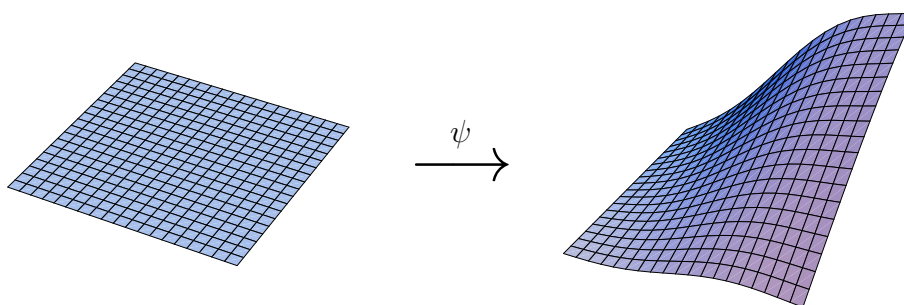


Abbildung 14.1: Das Integral von $\omega \in \Omega_1^k(M)$ auf M (rechts) wird definiert durch das Zurückziehen auf B (links).

Bemerkung 14.1.1 Dieses Integral hängt ab von der Parametrisierung ψ . Man kann aber zeigen, dass für jede andere zulässige Parametrisierung $\tilde{\psi}$ gilt

$$\int_{M, \psi} \omega = \pm \int_{M, \tilde{\psi}} \omega. \quad (14.1)$$

Setzen wir $\phi = \tilde{\psi} \circ \psi^{inv}$, dann gilt nämlich, dass

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}^*(\omega) &= (\phi \circ \psi)^*(\omega) = \phi^*(\psi^*(\omega)) = \\ &= \phi^*(f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \\ &= f \circ \phi \phi^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k) = \\ &= f \circ \phi \det(D\phi) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k,\end{aligned}$$

und

$$\int_{M, \tilde{\psi}} \omega = \int_{\tilde{B}} f \circ \phi \det(D\phi) d\lambda_k$$

Wegen der Transformationsformel gilt

$$\int_B f d\lambda_k = \int_{\tilde{B}} f \circ \phi |\det(D\phi)| d\lambda_k,$$

und weil $\det(D\phi)$ ein festes Vorzeichen hat, folgt (14.1).

Wenn ψ und $\tilde{\psi}$ eine ähnliche Orientierung haben, das heißt $\text{sgn}(\det(D\phi)) = 1$, dann hat man

$$\int_{M, \psi} \omega = \int_{M, \tilde{\psi}} \omega.$$

Wenn M k -dimensional ist, und durch ψ wie in Definition 14.1 parametrisiert wird, also $\psi(B) = M$, dann ist $\psi(\partial B)$ eine $(m-1)$ -dimensionale Menge. Wir wollen für $\omega \in \Omega_1^{k-1}(M)$ ein ‘orientiertes’ Randintegral definieren.

Definition 14.2 Sei $B := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$ ein Block und sei $\psi \in C^1(B; \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Parametrisierung von M . Man setzt

$$\begin{aligned}B_{(i,0)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{a_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_k, b_k], \\ B_{(i,1)} &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times \{b_i\} \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_k, b_k].\end{aligned}$$

Sei $\psi_{(i,j)} = \psi|_{B_{(i,j)}}$ und $M_{(i,j)} = \psi(B_{(i,j)})$. Dann definiert man für $\omega \in \Omega_1^{k-1}(M)$

$$\int_{\partial(M, \psi)} \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \left(\int_{M_{(i,1), \psi_{(i,1)}}} \omega - \int_{M_{(i,0), \psi_{(i,0)}}} \omega \right). \quad (14.2)$$

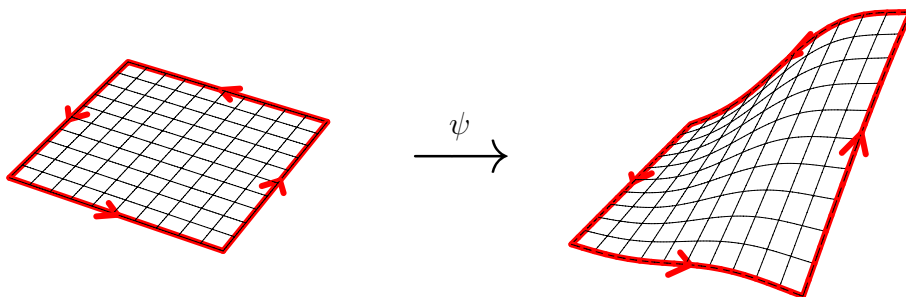


Abbildung 14.2: Das Integral von $\omega \in \Omega_1^{k-1}(M)$ auf ‘ ∂M ’ wird mit Vorzeichen definiert.

Für mehr allgemeine k -dimensionale Mannigfaltigkeiten M , die sich parametrisieren lassen durch endlich viele $\{(\psi_i, U_i); 1 \leq i \leq N\}$ mit $U_i \subset \mathbb{R}^k$ offen und derart, dass es abgeschlossenen Blöcke $B_i \subset U_i$ gibt mit

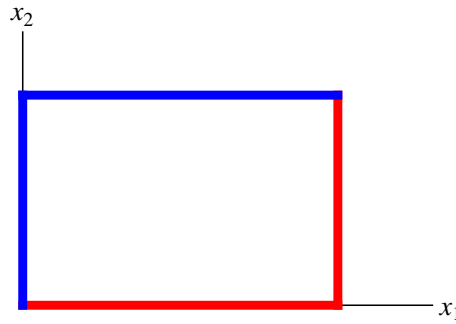


Abbildung 14.3: (14.2) in \mathbb{R}^2 : Randintegrale mit positivem Vorzeichen in rot; mit negativem in blau.

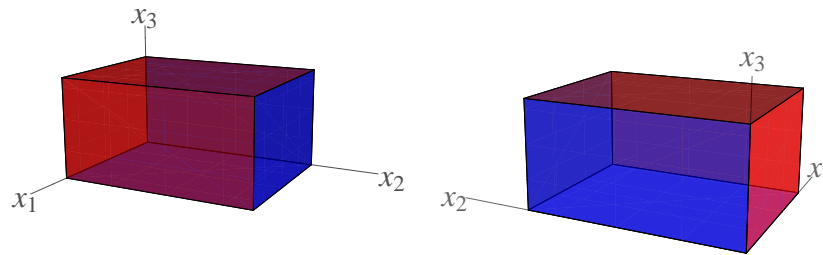


Abbildung 14.4: (14.2) in \mathbb{R}^3 : Randintegrale mit positivem Vorzeichen in rot; mit negativem in blau.

- $\psi_i(B_i^\circ) \cap \psi_j(B_j^\circ)$ disjunkt;
- $\bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i) = M$, und
- und wenn $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) \neq \emptyset$, dann soll für $\phi_i^j = \psi_i \circ \psi_j^{inv}$ gelten, dass

$$\text{sgn}(\det(D\phi_i^j)) = 1,$$

dann definiert man für $\omega \in \Omega_1^k(M)$ mit $M_i = \psi_i(B_i)$

$$\int_{M, \{\psi_i\}} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{M_i, \psi_i} \omega. \tag{14.3}$$

Diese letzte Bedingung erfordert, dass M orientierbar ist:

Definition 14.3 Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit M heißt **orientierbar**, wenn sie eine stetige Differentialform vom Grad m besitzt, die nirgends verschwindet.

Ein Integral wie in (14.3) über das Möbiusband ist nicht wohldefiniert. Für $\omega \in \Omega_1^{k-1}(M)$ definiert man

$$\int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\partial(M_i, \psi_i)} \omega. \tag{14.4}$$

Man soll bemerken, dass bei anliegenden M_i und M_j das Integral über den gemeinsamen Rand wegfällt, da dieses Randteil mit entgegengesetzten Vorzeichen aufgeführt wird.

Man könnte denken, dass man mit Blöcke nur eckigen Teilen von Mannigfaltigkeiten erreichen kann. An Hand von Abbildung 14.6 sieht man, dass dies nicht so ist.

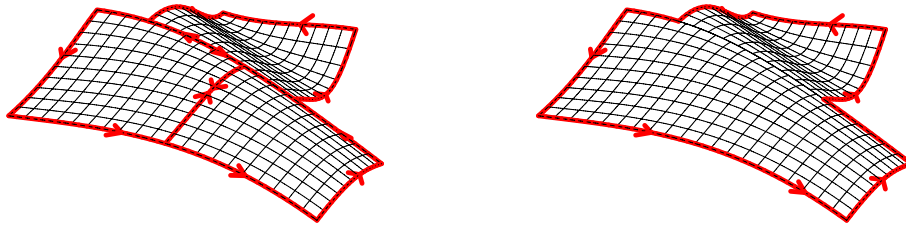


Abbildung 14.5: Gemeinsame Ränder von M_i und M_j liefern keinen Beitrag im Randintegral, weil sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

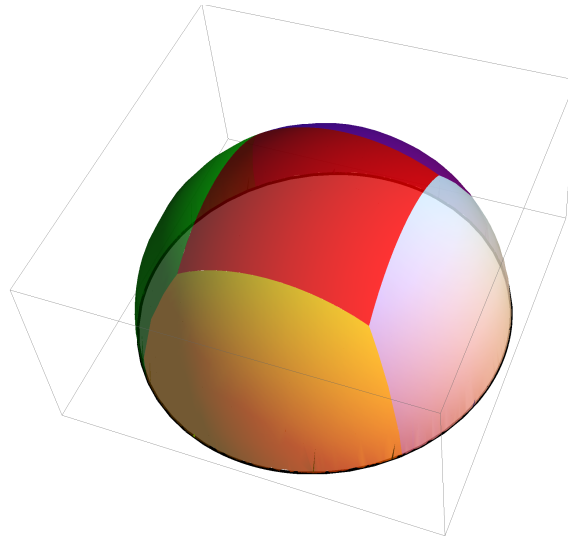


Abbildung 14.6: Eine halbe Sphäre kann man mit 5 Rechtecken eindeutig Parametrisieren.

14.2 Beweis des Stokeschen Satzes

Satz 14.4 (Stokes (fast) allgemein) Sei $\omega \in \Omega_1^{k-1}(M^*)$ und sei $\{(\psi_i, B_i); 1 \leq i \leq N\}$ eine eindeutige Parametrisierung für die k -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit $M = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i)$. Dann gilt

$$\int_{M, \{\psi_i\}} d\omega = \int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega.$$

Bemerkung 14.4.1 Eigentlich sollte man $\int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega|_{TM}$ statt $\int_{\partial(M, \{\psi_i\})} \omega$ schreiben.

Beweis. Es reicht, wenn wir diesen Satz beweisen für eine Mannigfaltigkeit M , die sich durch eine (ψ, B) parametrisieren läßt. Für die Form ω gibt es $f_1, \dots, f_k \in C^1(B; \mathbb{R})$ derart, dass

$$\psi^*(\omega) = \sum_{i=1}^k f_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Man erhält sofort:

$$\psi^*(d\omega) = d(\psi^*(\omega)) = \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Setzen wir $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$,

$$\tilde{B}_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \cdots \times [a_k, b_k]$$

und $dx'_i = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_k$. Es folgt mit Fubini und dem Hauptsatz der Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned} \int_{M, \psi} d\omega &= \int_B \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) d\lambda_k = \int_{\tilde{B}_i} \left(\int_{a_i}^{b_i} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_i \right) dx'_i = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_{\tilde{B}_i} (f(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_k)) dx'_i = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \left(\int_{M_{(i,1), \psi}} \omega - \int_{M_{(i,0), \psi}} \omega \right) = \int_{\partial(M, \psi)} \omega. \end{aligned}$$

Da wir eine eindeutige Parametrisierung $M = \bigcup_{1 \leq i \leq N} \psi_i(B_i)$ angenommen haben, ist man fertig, wenn man die Idee in Abbildung 14.5 verstanden hat. \blacksquare

Der Satz gilt auch für nette Mannigfaltigkeiten, die sich nicht unbedingt mit Blöcken parametrisieren lassen. Meistens reichen jedoch Blöcke.

14.3 Beweis des Integralsatzes von Gauß

Der Satz von Gauß in \mathbb{R}^n (Satz 12.27) sagt folgendes:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\partial U \in C^1$. Sei $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^n)$ und sei \mathbf{n} der auswärts gerichtete Normaleneinheitsvektor auf ∂U und $d\sigma = d(\partial U)$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\int_U \nabla \cdot v \, d\mathbb{R}^n = \int_{\partial U} v \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Beweis des Satzes 12.27. Fassen wir $U \subset \mathbb{R}^n$ auf als Mannigfaltigkeit. Weil

$$v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

gilt, findet man

$$\begin{aligned} &d(v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n = \\ &= (\nabla \cdot v) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Es folgt mit Stokes, dass

$$\begin{aligned} \int_U \nabla \cdot v \, d\lambda &= \int_{U,I} \nabla \cdot v \, d\mathbb{R}_m = \int_{U,I} d(v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \\ &= \int_{\partial(U,I)} (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)}. \end{aligned}$$

Wenn man den auswärtigen Normaleneinheitsvektor an der Stelle x mit $\mathbf{n}(x)$ bezeichnet, hat man

$$v = (v \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + w$$

mit w tangential an ∂U . Es folgt

$$\begin{aligned} (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} &= \\ &= (v \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} + (w \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)}. \end{aligned}$$

Man bedenke, dass n Vektoren $\{w, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ in ein $(n-1)$ -dimensionaler Teilraum, hier der Tangentialraum $T_x(\partial U)$, linear abhängig sind, und es dann aus der Antisymmetrie der Differentialform folgt, dass

$$(w \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(u_1, \dots, u_{n-1}) = (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(w, u_1, \dots, u_{n-1}) = 0.$$

Man findet

$$\begin{aligned} \int_{\partial(U,I)} (v \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} &= \\ &= \int_{\partial(U,I)} (v \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)|_{T_x(\partial U)} = \int_{\partial U} (v \cdot \mathbf{n}) \, d(\partial U). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Mehr allgemeiner zeigt man:

$$\int_{(U,\psi)} \operatorname{div} v \, dU = \int_{\partial(U,\psi)} (v \cdot \mathbf{n}) \, d(\partial U).$$

Hier kann U sogar eine Mannigfaltigkeit sein. ■

Für Korollar 12.28 bemerke man, dass

$$\operatorname{div}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) = (\Delta f) g - f (\Delta g).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_U ((\Delta f) g - f (\Delta g)) \, d\lambda &= \int_U \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) \, d\mathbb{R}_n = \\ &= \int_U (g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g) \cdot \mathbf{n} \, d(\partial U) = \int_{\partial U} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} g - f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d(\partial U). \end{aligned}$$

14.3.1 Ein Beispiel

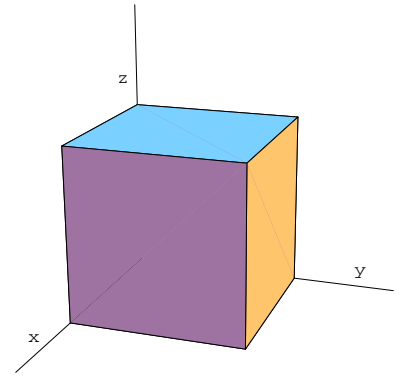
Beispiel 14.5 Sei

$$K = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\}$$

und $v(x, y, z) = (3x, xy, 2xz)$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_K (\nabla \cdot v) dV &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (3 + x + 2x) dz dy dx = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (3 + 3x) dy dx = \int_{x=0}^1 (3 + 3x) dx = 4\frac{1}{2} \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} (v \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \left(\int_{\text{Links}} + \int_{\text{Vorne}} + \int_{\text{Rechts}} + \int_{\text{Hinten}} + \int_{\text{Oben}} + \int_{\text{Unten}} \right) (v \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz + \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz + \\ &+ \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ x \\ 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx dz + \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dy dz + \\ &+ \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ xy \\ 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \begin{pmatrix} 3x \\ xy \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = \\ &= \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 3 dy dz + \int_{x=0}^1 \int_{z=0}^1 x dx dz + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 2x dx dy = 3 + \frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Der Satz von Gauß hat es also richtig vorhergesagt.

14.4 Beweis des klassischen Stokesschen Satzes

Die klassische Formulierung des Satzes von Stokes lautet:

Sei M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 . Sei $v \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^3)$ und sei \mathbf{n} ein stetiger Normaleneinheitsvektor auf M und $d\sigma$ das Oberflächendifferential. Dann gilt

$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds,$$

wobei der Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ sich zu \mathbf{n} links herum dreht.

Beweis von Satz 12.29. Man hat

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$



Abbildung 14.7: In der klassischen Fassung des Stokeschen Satzes verhalten sich der Normalenvektor (in grün) und die tangentielle Richtung (in rot) wie Daumen und Finger der rechten Hand. Siehe auch Abbildung 12.2.

Definieren wir die Differentialform ω von Grad 1 durch

$$\omega = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \quad (14.6)$$

dann folgt

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial v_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \\ &\quad + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 = \\ &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Wie in (14.5) hat man für ein Vektorfeld $z = (z_1, z_2, z_3)^T$, dass

$$\iint_M z \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\partial M} z_1 dx_2 \wedge dx_3 + z_2 dx_3 \wedge dx_1 + z_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

So findet man für ω aus (14.6) mit dem allgemeinen Satz von Stokes, dass mit passender Parametrisierung

$$\begin{aligned} \iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{M,\psi} d\omega = \int_{\partial(M,\psi)} \omega = \\ &= \int_{\partial(M,\psi)} v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 = \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds. \end{aligned}$$

Die Parametrisierung für den zweiten Schritt führt dazu, dass der Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und der tangentielle Vektor $\boldsymbol{\tau}$ eine feste Orientierung haben. ■

14.4.1 Ein Beispiel

Beispiel 14.6 Sei $v(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$ und

$$M = \{(x, y, z); z = x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Wir nehmen \mathbf{n} nach oben gerichtet und berechnen

$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad \text{und} \quad \int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

Zum ersten Integral brauchen wir

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 2y \end{pmatrix}$$

und \mathbf{n} . Parametrisieren wir M durch $\psi(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ist ein Vektor orthonormal auf ∂M . Normalisieren und die richtige Richtung nehmen führt einen zu

$$\mathbf{n} = \frac{\pm \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt¹

$$\iint_M (\nabla \times v) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_M \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 2y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} d\sigma =$$

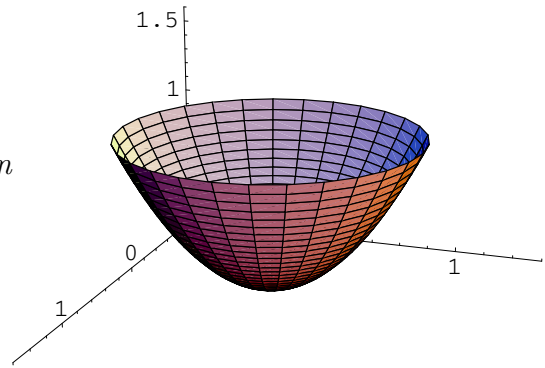
¹Beim Normalisieren fanden wir $(\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1})^{-1}$ und bei $d\sigma$ den Faktor $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$. Das so etwas kein Zufall ist, sieht man, wenn man zurück geht zu der Ableitung von $\sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)}$. Es ist dann auch einfacher $\mathbf{n} d\sigma$ gemeinsam zu berechnen:

$$\mathbf{n} d\sigma \text{ "="} \pm \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (14.7)$$

Die Gänsefüßchen stehen da, weil man ein Integral über eine Mannigfaltigkeit dabei zurückzieht auf das Parametrisierungsgebiet. Genauer wäre

$$\int_{M=\psi(U)} v \cdot \mathbf{n} d\sigma = \pm \int_U (v \circ \psi(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \times \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy$$

für ein Vektorfeld v auf M .



$$\begin{aligned}
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1-2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}} dx dy = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1-2y) dx dy = \pi.
\end{aligned}$$

Wir finden auch mit $(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$, dass

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} v \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} (\sin \varphi)^2 \\ \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (-(\sin \varphi)^3 + (\cos \varphi)^2) d\varphi = \pi.
\end{aligned}$$

Stokes hätte nur einmal gerechnet.