Prof. Guido Sweers **WS 2010/2011**
Matthias Erven

Analysis III
Übungsblatt 0

Diese Aufgaben werden in den Übungen der zweiten Vorlesungswoche besprochen. Sie müssen nicht eingereicht werden.

1. Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion.
   (a) i. Sei J eine beliebige Indexmenge und $B_j \subset N$ für $j \in J$. Zeigen Sie, dass gilt:
   $$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad \text{und} \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$
   ii. Sei I eine beliebige Indexmenge und $A_i \subset M$ für $i \in I$. Gilt auch
   $$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad \text{und} \qquad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)?$$
   (b) Seien nun $(M, \mathcal{T})$ und $(N, \mathcal{S})$ topologische Räume.
   i. Zeigen Sie, dass
   $$\left\{f^{-1}(S); S \in \mathcal{S}\right\} \tag{1}$$
   eine Topologie für M ist.
   ii. Ist analog $\{f(T); T \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie für N?

2. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $\mathcal{S}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$. Welche Eigenschaft muß f genau haben, damit die durch (1) definierte Topologie auf $\mathbb{R}^m$ die Standardtopologie ist?

3. **(Beispiel 1.8)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ gegeben durch $f(x) = e^{ix}$ und
   $$\mathcal{T} := \left\{f^{-1}(A); A \subset \mathbb{C} \text{ offen}\right\}.$$
   (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nicht die Hausdorff-Eigenschaft hat.

4. Wir betrachten $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{Q}\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ abzählbar ist.
   (b) Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$. Ist $\mathcal{U} := \left\{B_{\frac{1}{n}}(z_n)\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ eine (offene) Überdeckung von $\mathbb{C}$?
   Hinweis: $B_\varepsilon(z_*) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_*| < \varepsilon\}$.