Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am 21.10.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(8 Punkte)** Wir betrachten $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie. Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die folgenden Mengen in der Borel-σ-Algebra enthalten sind.

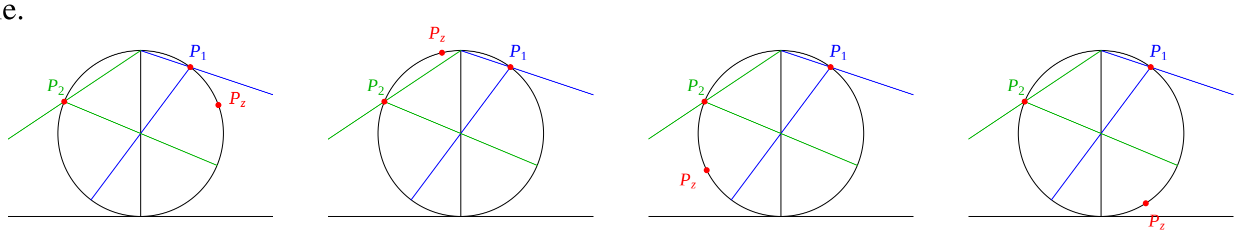
i) $(0,1)$ ii) $[0,1)$ iii) $\{0\}$ iv) $\mathbb{Q}$

Aufgabe 2. **(6 Punkte)** Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(N)$ eine σ-Algebra auf N. Zeigen Sie, dass $\left\{f^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\right\}$ eine σ-Algebra auf M definiert.

Aufgabe 3. **(6 Punkte)** Für $x,y \in \mathbb{R}$ definieren wir wie in Beispiel 1.6

$$d(x,y) = \min\left(|\arctan(x) - \arctan(y)|, \pi - |\arctan(x) - \arctan(y)|\right).$$

Beweisen Sie, dass d die Dreiecksungleichung erfüllt.
Hinweis: Verwenden Sie die Veranschaulichung der Metrik auf dem Kreis und unterscheiden Sie mehrere Fälle.



Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 4. Wir betrachten Abbildungen $d_1, d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die für $x,y \in \mathbb{R}^2$ folgendermassen definiert sind:

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad d_2(x,y) = \frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$$

1. Zeigen Sie, dass d_1 und d_2 jeweils eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ sind.
2. Zeigen Sie, dass weder d_1 noch d_2 von einer Norm auf $\mathbb{R}^2$ induziert werden.
   Bemerkung: In einem normierten Raum $(X, \|.\|)$ heißt $d : X^2 \to \mathbb{R}$ mit $d(x,y) := \|x-y\|$ die *von der Norm induzierte Metrik*. Insbesondere gilt $\|x\| = d(x,0)$.
3. Geben Sie $U_1(0,0)$ für die jeweilige Metrik an.

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Wahr oder nicht wahr?

1. Wenn X endlich ist, ist $\mathcal{P}(X)$ endlich.
2. Wenn X abzählbar ist, ist $\mathcal{P}(X)$ abzählbar.

Aufgabe 6.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ eine Topologie für $\mathbb{R}^n$ ist.
2. Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); A \text{ ist offen}\}$. Zeigen sie, dass $\mathcal{T}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht identisch sind.
3. Geben Sie eine Topologie $\tilde{\mathcal{T}}$ an, mit $\mathcal{T} \subsetneqq \tilde{\mathcal{T}} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 7. Man definiert für $f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ die Menge

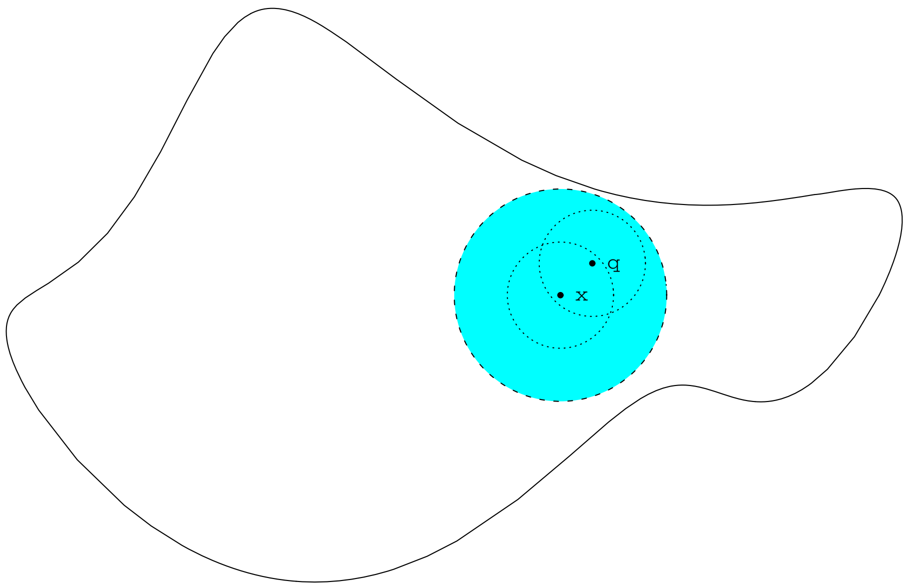
$$A_f := \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \text{ mit } f(k)=1} (k, k+1].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = \left\{A_f; f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}\right\}$ eine σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge.

1. Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in A$ ein $q_x \in \mathbb{Q}^n$ und ein $r_x \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$x \in B_{r_x}(q_x) \subset A.$$



2. Zeigen Sie, dass sich zu jedem $q \in A \cap \mathbb{Q}^n$ Zahlen $r_q \in \mathbb{R}^+$ finden lassen, so dass gilt:

$$A = \bigcup_{q \in A \cap \mathbb{Q}^n} B_{r_q}(q).$$

3. Zeigen Sie, dass eine Topologie für $\mathbb{R}^n$, die alle offenen Kugeln enthält, bereits alle offenen Mengen enthält.