Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 12

Diese Hausaufgaben werden am 20.01.2011 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(12 Punkte)** Sei $\left\{b^1,\dots,b^n\right\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ und sei $V = \left\{\sum_{i=3}^n c_i b^i; c_i \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Zeigen Sie: ω_1, definiert durch $\omega_1\left(v^1,\dots,v^{n-2}\right) = \det\left(v^1,\dots,v^{n-2},b^1,b^2\right)$, ist eine äußere $n-2$-Form, das heißt: $\omega_1 \in \Lambda^{n-2}\left(V^*\right)$.
2. Zeigen Sie: $\{\omega_1\}$ ist eine Basis für $\Lambda^{n-2}\left(V^*\right)$.
3. Gibt es $c \in \mathbb{R}$ derart, dass $\det\left(v^1,\dots,v^{n-2},b^{n-1},b^n\right) = c\det\left(v^1,\dots,v^{n-2},b^1,b^2\right)$ für alle $v^i \in V$?
4. Ist $\left\{\det\left(\cdot,\dots,\cdot,b^1,b^2,b^i\right)\right\}_{i=3}^n$ eine Basis für $\Lambda^{n-3}\left(V^*\right)$?

Aufgabe 2. **(8 Punkte)** Sei $\{e_1,\dots,e_k\}$ eine Basis für V und sei $\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}$ die duale Basis für V^*. Sei $\omega \in \Lambda^m\left(V^*\right)$ mit $1 \le m < k$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \wedge (e_i \lrcorner\, \omega) = m\,\omega$$

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für $\omega \in \Lambda^k\left(V^*\right)$ und $\eta \in \Lambda^m\left(V^*\right)$ gilt:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{km}\,\eta \wedge \omega$$

Aufgabe 4. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $\omega_1,\dots,\omega_k \in \Lambda^1\left(V^*\right)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\{\omega_1,\dots,\omega_k\}$ ist linear unabhängig.
2. $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \neq 0$.