Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 13

Diese Hausaufgaben werden am 27.01.2011 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wir betrachten

$$R = \left\{ (x,y,z)\,; x \geq 0 \text{ und } \frac{5}{4}x^2 + 4y^2 + z^2 = 16 + xz \right\}$$

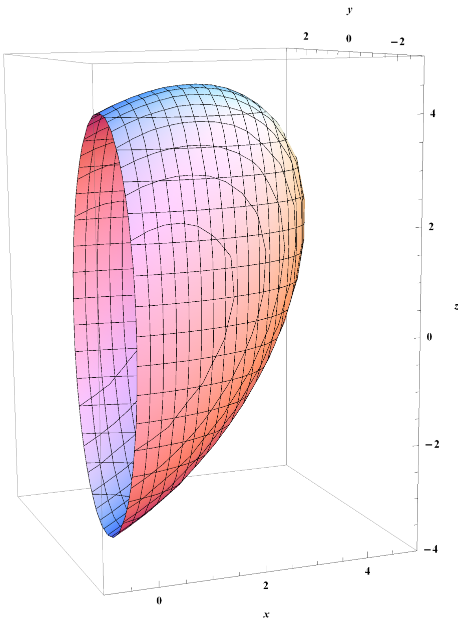
und die Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die gegeben ist durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x\sin(xyz)} \\ x+y-z \\ y-x-\frac{1}{4}z \end{pmatrix}.$$

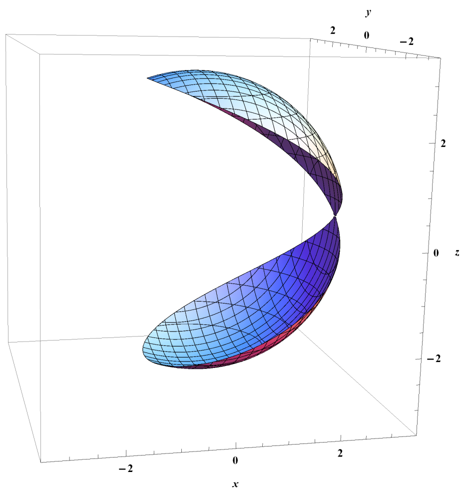
Berechnen Sie

$$\int_R (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

wobei $\mathbf{n}$ für den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor und $d\sigma$ für das Oberflächendifferential steht.



zu Aufgabe 1



zu Aufgabe 4

Aufgabe 2. In der Vorlesung wurde die Divergenz von Vektorfeldern auf m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M im $\mathbb{R}^n$ definiert. Zeigen Sie, dass diese Definition im klassischen Fall, also für $m = n$ und $M = \mathbb{R}^n$, mit der klassischen Definition 12.22 übereinstimmt.

(bitte wenden)

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Berechnen Sie:

1. Für $B_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\right\}$ das Integral

$$\int_{\partial B_1(0)} \left(x_1^2 + x_2 - 2x_3\right) d\sigma,$$

   wobei $d\sigma$ das Oberflächendifferential ist.

2. Für $H = \left\{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1 \text{ und } x_3 < 0\right\}$ das Integral

$$\int_H \operatorname{rot} \begin{pmatrix} 1 + x_1 x_3 \\ 2 + x_1 x_2 \\ 3 + x_2 x_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

   Hierbei steht **n** für den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor.

Aufgabe 4. Wir bezeichnen mit S die Fläche, die entsteht, wenn man die Kugeloberfläche $\left\{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = 9\right\}$ mit dem Zylinder $\left\{(x,y,z); (x-1)^2 + y^2 \leq 4\right\}$ schneidet, siehe Skizze. Der Rand von S wird durch die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = \left(1 + 2\cos(2t), 2\sin(2t), 2\sqrt{2}\sin(t)\right)$$

beschrieben. S^+ bezeichne die obere Hälfte von S, also all jene Punkte (x,y,z) aus S mit $z \geq 0$. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{S^+} (\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

wobei **n** für den nach oben gerichteten Normaleneinheitsvektor und $d\sigma$ für das Oberflächendifferential steht.