Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 2

Diese Hausaufgaben werden am 28.10.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(6 Punkte)** Geben Sie ein Beispiel für zwei messbare Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ und eine Funktion $f : X \to Y$ an, die nicht $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist.

Aufgabe 2. **(8 Punkte)** Es sei $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionen $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbar sind.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 0 \\ \frac{1}{m} & \text{wenn } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1 \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(\sqrt{|x|}\right)$

Aufgabe 3. **(6 Punkte)** Es sei δ_0 das Dirac-Maß aus Beispiel 2.8 für $a = 0$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_0)$ ein Maßraum ist.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 4. Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die folgendes erfüllt:

1. f ist Borel-messbar;
2. f ist unstetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt σ-subadditiv, wenn für jede Folge $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Ähnlich nennt man μ subadditiv, wenn für endlich viele $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

Beweisen oder widerlegen Sie die einzelnen Behauptungen für eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mu \text{ ist } \sigma\text{-additiv} & \Rightarrow & \mu \text{ ist } \sigma\text{-subadditiv} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mu \text{ ist additiv} & \Rightarrow & \mu \text{ ist subadditiv} \end{array}$$

(bitte wenden)

Aufgabe 6. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Zeigen Sie, dass dann für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq n} \mu(\bigcap_{\ell=1}^{k} A_{n_\ell})$$

Aufgabe 7. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass μ_B definiert durch

$$\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$$

ein Maß ist für $(X, \mathcal{A})$.