Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2010/2011**

Analysis III
Übungsblatt 3

Diese Hausaufgaben werden am 04.11.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Zusätzliche Rechenregeln auf $[0,\infty]$:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } x+\infty = \infty + x = \infty.$$
$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R}^+ \text{ gilt } x\cdot\infty = \infty\cdot x = \infty.$$
$$\infty+\infty = \infty \text{ und } \infty\cdot\infty = \infty$$

Stimmen die folgenden Aussagen für alle $a,b,c \in [0,\infty]$?

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$
2. $a+b = c+b \implies a = c$
3. $ab = cb$ und $b \neq 0 \implies a = c$
4. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$.
5. Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}^+$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

PS: Wir sagen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, wenn es für jedes $M \in \mathbb{N}$ ein $n_M \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \geq n_M \implies a_n > M$.

Aufgabe 2. Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

1. Definiere $\xi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ durch
$$\xi(A) = \sum_{n\in A} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
Ist ξ ein Maß für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
2. Definiere $\zeta : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ durch
$$\zeta(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ endlich viele Elemente hat,} \\ \infty, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ unendlich viele Elemente hat.} \end{cases}$$
Ist ζ ein Maß für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?
3. Es sei die Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ definiert durch
$$\mu^*(A) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan(n), & \text{falls } A \text{ genau } n \text{ Elemente hat,} \\ 1, & \text{falls } A \subset \mathbb{N} \text{ unendlich viele Elemente hat.} \end{cases}$$
   (a) Zeigen Sie, dass μ^* ein äußeres Maß ist für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
   (b) Welche Mengen sind μ^*-messbar?

(bitte wenden)

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Wir definieren für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 \text{ falls } A = \emptyset \\ \min\{m-n;\ m,n \in \mathbb{Z} \text{ und } A \subset [n,m]\} \text{ falls } A \text{ beschränkt} \\ \infty \text{ falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

1. Ist ν ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$?
2. Ist ν ein Maß auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 4. Sei μ^* ein äußeres Maß auf X. Man definiere für $A \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu_*(A) := \inf\{\mu^*(B) - \mu^*(B \cap A^c); B \in \mathcal{P}(X) \text{ mit } A \subset B \text{ und } \mu^*(B \cap A^c) < \infty\}.$$

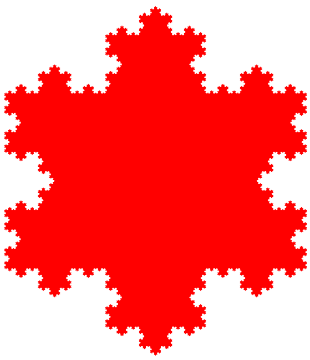
1. Zeigen Sie, dass $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt für $A \in \mathcal{A}(\mu^*)$.

Aufgabe 5. Sei h_1^* das äußere Hausdorff-Mass. Zeigen Sie:

1. Für einen Polygonzug $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i \in \mathbb{R}^2$, bei dem kein Streckenstück zweimal durchlaufen wird, gilt
$$\sum_{i=1}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| = h_1^*(p(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$
2. Für stetig differenzierbare $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gilt
$$\text{Bogenlänge}(\gamma) = h_1^*(\gamma[0,1]).$$

Aufgabe 6. Sei h_s^* das äußere Hausdorff-Mass mit $s \in [0,n]$ auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. Wenn $0 \leq s < t \leq n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_s^*(A) < \infty$ ist, dann gilt $h_t^*(A) = 0$.
2. Wenn $0 \leq s < t \leq n$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist derart, dass $h_t^*(A) > 0$ ist, dann gilt $h_s^*(A) = \infty$.
3. Für jedes beschränkte $A \subset \mathbb{R}^n$ gibt es genau ein $s_A \in [0,n]$ derart, dass
$$h_s^*(A) = 0 \text{ für } s > s_A \text{ und } h_s^*(A) = \infty \text{ für } s < s_A.$$
Man nennt s_A die Hausdorff-Dimension von A.
4. Berechnen Sie die Hausdorff-Dimension der Kochschen Schneeflocke (Koch's snowflake). Damit wird der Rand (!) der folgenden Figur bezeichnet:



Die Definition der Kochschen Schneeflocke findet man im letzten Kapitel der Notizen zur Vorlesung Analysis 1.