Prof. Guido Sweers **WS 2010/2011**
Matthias Erven

Analysis III
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am 11.11.2010 um 13:11 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wahr oder falsch?

1. Es sei $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Wenn $\lambda(A) = 0$, dann gilt das auch für den Abschluss, also $\lambda\left(\overline{A}\right) = 0$.

2. Es sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß und $A \subset \mathbb{R}$. Wenn $\lambda^*(A) = 0$, dann ist A Lebesgue-messbar.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{R} = \{\lfloor x \rfloor ; x \in \mathbb{R}\}$ definiert wie in Beispiel 4.8. Bei der Konstruktion der nicht-Lebesgue-messbaren Menge wurde die Existenz einer Funktion f verwendet, die jedem $\lfloor x \rfloor \in \mathcal{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ zuordnet. Tatsächlich gibt es viele solcher Funktionen f. Zeigen Sie:

1. Es gilt $\lambda^*\left(f\left(\mathcal{R}\right)\right) > 0$ für jede dieser Funktionen f.

2. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ läßt sich eine solche Funktion f finden, dass $\lambda^*\left(f\left(\mathcal{R}\right)\right) < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 3. Die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n,$$

wobei die A_n folgendermaßen konstruiert werden:

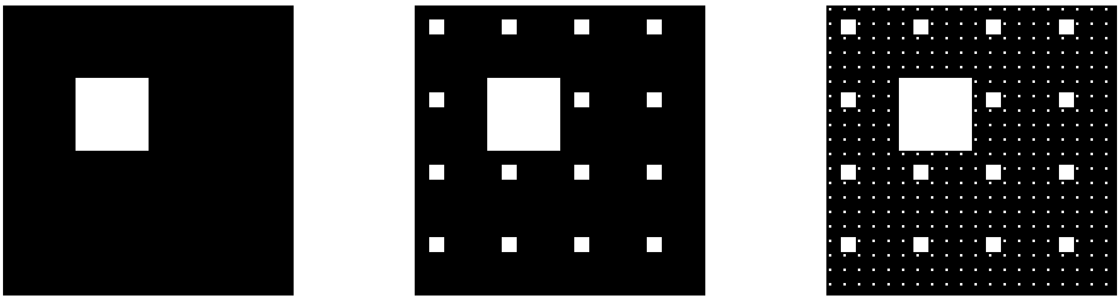
- Wir setzen $A_0 = [0,1] \times [0,1]$.

- Wir teilen das Quadrat A_0 in 16 Teilquadrate, indem jede Seitenlänge in vier gleich große Teile zerlegt wird. Das zweite (offene) Quadrat in der zweiten Spalte nehmen wir heraus, den verbliebenen Rest nennen wir A_1.

- Die 15 Quadrate, aus denen A_1 zusammengesetzt ist, zerlegen wir in jeweils $5 \cdot 5 = 25$ Teilquadrate. In jedem dieser Teilquadrate nehmen wir das zweite (offene) Quadrat in der zweiten Zeile heraus, den insgesamt verbliebenen Rest nennen wir A_2.

- Die 360 Quadrate, aus denen A_2 zusammengesetzt ist, zerlegen wir in jeweils 36 Teilquadrate...

Die Skizzen zeigen A_1, A_2 und A_3.



1. Ist A Lebesgue-messbar?

2. Berechnen Sie $\lambda(A)$.

(bitte wenden)

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 4. Wir definieren für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\nu(A) = \begin{cases} 0 \text{ falls } A = \emptyset \\ \min\{m-n;\ m,n \in \mathbb{Z} \text{ und } A \subset [n,m]\} \text{ falls } A \text{ beschränkt} \\ \infty \text{ falls } A \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

und setzen

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=0}^{\infty} \nu(A_i); \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \supset A\right\}.$$

1. Ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}$?
2. Ist μ^* ein Maß auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 5. Die Cantor-Menge C ist definiert durch

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right).$$

Ausführlicher gesagt teilt man $C_0 = [0,1]$ in 3 gleich große Intervalle und behält nur das linke und das rechte: $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dies wiederholt man für die beiden Intervalle in C_1 und bekommt $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ usw. Schließlich setzt man $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C Lebesgue-messbar ist und dass $\lambda(C) = 0$.

Die fette Cantor-Menge $C^\bullet$ ist ähnlich definiert. Statt beim n-ten Schritt in der Mitte ein offenes Interval der Länge 3^{-n} zu entfernen, entfernt man nun ein offenes Intervall der Länge 4^{-n}:

$$C_0^\bullet = [0,1],\ C_1^\bullet = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right],\ C_2^\bullet = \left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right] \text{ usw.}$$

Man setzt $C^\bullet = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n^\bullet$.

(b) Zeigen Sie, dass $C^\bullet$ Lebesgue-messbar ist und berechnen Sie $\lambda(C^\bullet)$.

Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt dicht in X, wenn es für jedes $x \in X$ eine Folge $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ gibt derart, dass $\|x - a_i\| \to 0$ für $i \to \infty$. Anders gesagt bedeutet dies $\bar{A} = X$. Eine Teilmenge A heißt nirgends dicht, wenn $\left(\bar{A}\right)^o = \emptyset$.

(c) Zeigen Sie dass C und $C^\bullet$ nirgends dicht sind.

Aufgabe 6. Sei $d(.,.)$ die Distanzfunktion zweier Mengen in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Man beweise oder widerlege:

1. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
2. $d(A\cup B,C) \leq \min(d(A,C), d(B,C))$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
3. $d(A\cap B,C) \leq \max(d(A,C), d(B,C))$ für alle $A,B,C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.