Prof. Guido Sweers **WS 2010/2011**
Matthias Erven

Analysis III
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am 18.11.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. *In Analysis I haben Sie Funktionen f kennengelernt, die zum Beispiel auf dem Intervall $[0,1]$ nicht Riemann-integrierbar sind, weil sie eine Singularität bei 0 besitzen, für die man aber ein uneigentliches Riemann-Integral definieren kann, indem man zuerst den Integrationsbereich auf $[\varepsilon,1]$ einschränkt und dann $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx$ berechnet.*
In Analysis II wurde die Definition des Riemann-Integrals auf zwei und mehr Dimensionen übertragen. Kann man auch hier so etwas wie ein „uneigentliches Riemann-Integral in höherer Dimension" einführen? Zum Beispiel könnte man so ein uneigentliches Riemann-Integral auf $D\subset\mathbb{R}^2$ definieren durch

$$\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)\,d(x,y),$$

wobei $D_1\subset D_2\subset\ldots\subset D$ und $D=\bigcup_{n=1}^\infty D_n$ gilt.
Um zu zeigen, dass sich so etwas nicht sinnvoll definieren lässt, betrachten wir die Funktion

$$f: D=(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\frac{x-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1. Wir definieren
$$D_n = D\setminus\left(\left(0,\tfrac{1}{n}\right)\times\left(0,\tfrac{1}{n}\right)\right).$$
Es gilt $D_1\subset D_2\subset\ldots\subset D$ und $D=\bigcup_{n=1}^\infty D_n$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty}\int_{D_n} f(x,y)\,d(x,y)=0.$$

2. Wir definieren
$$E_n = D\setminus\left(\left(0,\tfrac{1}{n}\right)\times\left(0,\tfrac{2}{n}\right)\right).$$
Es gilt $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset D$ und $D=\bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Zeigen Sie, dass es ein $c>0$ gibt mit
$$\liminf_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x,y)\,d(x,y)=c.$$

Aufgabe 2. Es seien $f_1,f_2: X\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar über X und $f_1\le f_2$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_X f_1\,d\lambda\le\int_X f_2\,d\lambda$$

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $f: X\to\mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_T$-messbare Funktion. Zeigen Sie: Ist $f(x)\neq 0$ für alle $x\in X$, so ist auch $\frac{1}{f}$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_T$-messbar.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Wir betrachten

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten:

i. Ist f_i (uneigentlich) Riemann-integrierbar über $[0,1]$?

ii. Ist f_i Lebesgue-integrierbar über $[0,1]$?

Hinweis zu f_3: Betrachten Sie $\int_{((2n+1)\pi)^{-1}}^{1} f_3(x)dx$ und $\int_{(2n\pi)^{-1}}^{1} f_3(x)dx$ für $n \in \mathbb{N}^+$.

Aufgabe 5. Sei $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ eine $\mathcal{L}$-$\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$-messbare Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man

$$f_n := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \mathbf{1}_{\{x \in X; k \cdot 2^{-n} \leq f(x)\}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}_n := f_n + 2^{-n}.$$

Zeigen Sie:

1. f_n und $\tilde{f}_n$ sind einfach und $\mathcal{L}$-$\mathcal{L}$-messbar.

2. $f_n \leq f \leq \tilde{f}_n$.

3. Wenn f beschränkt ist und $\lambda(X) < \infty$, ist f Lebesgue-integrierbar.

4. Eine stetige Funktion $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ auf einer kompakten Menge ist Lebesgue-integrierbar.