Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am 25.11.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(0 Punkte)** Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ und $f, f_k : K \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Wiederholen Sie die Definitionen von

1. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ punktweise auf K;
2. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ gleichmäßig auf K;
3. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ λ-f.ü. auf K ;
4. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ nach dem Lebesgue-Maß.

   Suchen Sie in der Literatur eine vernünftige Definition von

5. $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ λ-fast gleichmäßig auf K.

Aufgabe 2. **(20 Punkte)** Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen jeweils auf Konvergenz im Sinne der in Aufgabe 1, Teil 1 bis 4 gefragten Begriffe.

1. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin(kx)$
2. $f_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin\left(\frac{x}{k}\right)$
3. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sin\left(\frac{x}{k}\right)$
4. $f_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = |\sin(x)|^k$
5. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = |\sin(x)|^k$

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen jeweils auf Konvergenz im Sinne der in Aufgabe 1, Teil 1 bis 4 gefragten Begriffe.

1. $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \sqrt[k]{x}$
2. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \arctan(x + k)$
3. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = ke^{-kx^2}$

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Wenn $f_k \to f$ und $f_k \to g$ nach Maß μ für $k \to \infty$, dann gilt $f = g$ μ-fast überall.

Aufgabe 5. Betrachten Sie Abbildung 6.1 aus den Notizen zur Vorlesung und beweisen Sie die eingezeichneten Implikationen.

Aufgabe 6. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-messbare Menge. Man definiert für $p > 1$ die Funktionenmenge $\mathcal{L}^p(X) \subset \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(X)$ durch

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(X);\, \int_X |f|^p \, d\lambda < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{L}^p(X) \subset \mathcal{L}^1(X) \Longleftrightarrow \lambda(X) < \infty$.