Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am 02.12.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Richtig oder falsch?

1. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) = x^{-k}$.
$$\lim_{k\to\infty} \int_{[1,\infty)} f_k \, d\lambda = \int_{[1,\infty)} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda.$$
2. $$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 k \cos\left(k^2 t\right) \, dt = \int_0^1 \lim_{k\to\infty} k \cos\left(k^2 t\right) \, dt$$
3. $$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{k\, x^{5/2}}{k\, x^2 + 1} dx = \frac{2}{3}.$$
4. $$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 e^{tx^2} dx\right) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} e^{tx^2}\right) dx.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Ableitung und überlegen Sie sich dann, wie sich die Konvergenzsätze aus der Vorlesung auf den Fall „$\lim_{s\to t} \ldots$“übertragen lassen.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{|x|^\alpha}{1+|x|^2}$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $f \in \mathcal{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$?
Hinweis: In $\mathbb{R}^n$ gilt $\int_{B_R(0)} g(|x|)\, dx = \omega_n \int_0^R g(r) r^{n-1}\, dr$, wobei ω_n für den Oberflächeninhalt der n-dimensionalen Einheitskugel steht.

Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Richtig oder falsch?

1. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_k(x) = kx^{k-1}$.
$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f_k \, d\lambda = \int_{[0,1]} \lim_{k\to\infty} f_k \, d\lambda.$$
2. $$\int_0^\infty \lim_{t\to\infty} \frac{x\, t^2}{t^4 + x^4} dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{x\, t^2}{t^4 + x^4} dx.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \frac{x\, t^2}{t^4 + x\, t^2 + x^6} dx.$$
Hinweis: $\frac{x\, t^2}{t^4 + x\, t^2 + x^6} \leq \min\left(1, x^{-2}\right)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5. Die Menge aller stetig differenzierbaren Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nennt man $C^1[0,1]$.

1. Zeigen Sie, dass $p : C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$p(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right|$$

   eine Seminorm auf $C^1[0,1]$ ist.

2. Zeigen Sie, dass gleiches p eingeschränkt auf $C^1_{R_0}[0,1] := \left\{f \in C^1[0,1]\,; f(0) = 0\right\}$ eine Norm ist.

3. Wir setzen

$$\|f\|_1 = p(f) + |f(0)| \text{ und } \|f\|_2 = p(f) + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

   Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf $C^1[0,1]$ sind.