

Analysis III
Übungsblatt 8

Diese Hausaufgaben werden am 09.12.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Es seien $1 \leq r, p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Wir setzen hier ausnahmsweise $\frac{1}{\infty} = 0$. Außerdem seien $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^q(X)$ und $h \in \mathcal{L}^r(X)$. Zeigen Sie

$$\|fgh\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^q(X)} \|h\|_{\mathcal{L}^r(X)}.$$

Aufgabe 2. Für $p \in [1, \infty)$ sei $\ell_p = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}; \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^p < \infty\}$.

1. Zeigen Sie, dass $(\ell_p, +, \mathbb{R}, \cdot)$ ein Vektorraum ist.
2. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$, definiert durch

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

eine Norm ist auf ℓ_p .

3. Zeigen Sie, dass $(\ell_p, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist.



Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 3. Seien $p, q \in [1, \infty]$ und ℓ_p wie in Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für $f \in \ell_p$ und $g \in \ell_q$ folgendes gilt:

1. $f + g \in \ell_r$ für alle $r \in [\max(p, q), \infty]$.
2. $fg \in \ell_r$ für alle $r \in \left[\frac{pq}{p+q}, \infty \right]$ falls $\frac{pq}{p+q} \geq 1$.
3. Geben Sie ein Beispiel an mit $f \in \ell_p$, $g \in \ell_q$ und $fg \notin \ell_r$ für $r < \frac{pq}{p+q}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Seien $p, q \in [1, \infty)$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Lebesgue-messbare Menge: $X \subset B_R(0)$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{L}^p(X)$ und $g \in \mathcal{L}^q(X)$ folgendes gilt:

1. $f + g \in \mathcal{L}^r(X)$ für alle $r \in [1, \min(p, q)]$.
2. $fg \in \mathcal{L}^r(X)$ für alle $r \in \left[1, \frac{pq}{p+q}\right]$ falls $\frac{pq}{p+q} \geq 1$.
3. Geben Sie ein Beispiel an mit $f \in \mathcal{L}^p(X)$, $g \in \mathcal{L}^q(X)$ und $fg \notin \mathcal{L}^r(X)$ für $r > \frac{pq}{p+q}$.
4. Kann man ähnliche Ergebnisse zeigen für den Fall $\lambda(X) = \infty$?

Aufgabe 5. Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$. Wir betrachten $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$.

1. Zeigen Sie: $\sup\{|f(x)|; x \in K\} = \text{ess-sup}_K |f|$ für $f \in C(K)$.
2. Zeigen Sie: $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty = \text{ess-sup}_K |f|$ ist eine Norm für $C(K)$.
3. Zeigen Sie: $C(K)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist ein Banachraum.
4. Zeigen Sie: $C(K)$ ist eine Teilmenge von $\mathcal{L}^\infty(K)$.
5. Die natürliche Abbildung $I : \mathcal{L}^\infty(K) \rightarrow L^\infty(K)$ definiert durch $I(f) = \mathbf{f}$, wobei f ein Vertreter von \mathbf{f} ist, ist nicht ein-eindeutig. Zeigen Sie: $I : C(K) \rightarrow L^\infty(K)$ ist ein-eindeutig.
6. Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$. Ist $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|f\|_\infty = \text{ess-sup}_B |f|$ eine Norm für $C(B)$?

Aufgabe 6. Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ungerade und streng monoton wachsend, und sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann ist $\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds$ eine gerade und konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\Phi, X}$, definiert durch

$$\|f\|_{\Phi, X} := \inf \left\{ k > 0; \int_X \Phi\left(\frac{f}{k}\right) d\lambda < 1 \right\},$$

eine Seminorm ist auf $\mathcal{L}^\infty(X) \cap \mathcal{L}^1(X)$.

Diese (Semi-) Norm heißt Luxemburg-Norm. Für $\Phi(t) = |t|^p$ bekommt man wieder $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(X)}$.