Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2010/2011

Analysis III
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am 16.12.2010 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in einen der Briefkästen im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Berechnen Sie $\int_{x\in\mathbb{R}^3} e^{-\|x\|}\,dx$.

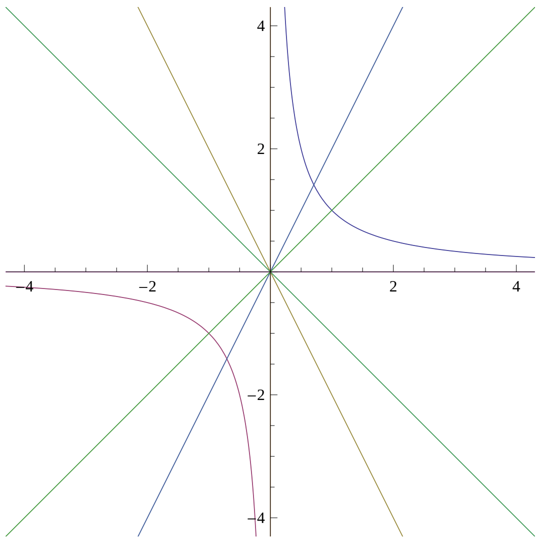
Aufgabe 2. Berechnen Sie $\int_{x\in\mathbb{R}^3} e^{-\|x\|^2}\,dx$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie $\int\limits_{0\le y\le x\le 1} \frac{y}{x^2}\,d(x,y)$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Volumen von

$$K = \{(x,y)\,;0\le xy\le 1 \text{ und } |x|\le|y|\le 2|x|\}.$$

Die Substitution $u = xy$, $v = y/x$ hilft.



Die folgenden unbewerteten Zusatzaufgaben dienen der weiteren Vertiefung:

Aufgabe 5.

1. Sei $(V,+,\mathbb{R},.,\|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{V'}$ definiert durch
$$\|T\|_{V'} = \sup\left\{\frac{|Tv|}{\|v\|_V}; v\in V\setminus\{0\}\right\}$$
eine Norm auf V' ist.

2. Sei $(V,+,\mathbb{R},.)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_V$ eine Seminorm auf V dergestalt, dass $\|v\|_V \neq 0$ für mindestens ein $v\in V$ ist. Sei V' der Vektorraum der linearen Abbildungen $T: V\to\mathbb{R}$, für die es ein $M_T>0$ gibt mit $|Tv|\le M_T\|v\|_V$ für alle $v\in V$. Ist $\|\cdot\|_{V'}$ definiert durch
$$\|T\|_{V'} = \sup\{|Tv|\,; v\in V \text{ mit } \|v\|_V = 1\}$$
eine Seminorm oder sogar eine Norm auf V'?

(bitte wenden)

Aufgabe 6. Beantworten Sie für untenstehende Funktionen die folgenden Fragen:

1. Ist die Abbildung wohldefiniert? Und wenn ja:
2. Ist die Abbildung linear?
3. Ist die Abbildung stetig?

i. $P : L^2\left(\mathbb{R}^2\right) \to L^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ mit $P(f)(x) = f(x) + f(-x)$

ii. $R : \ell_1 \to \ell_2$ mit $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$

iii. $S : L^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ mit $S(f)(x) = \sqrt{\|f\|_{L^1} |f(x)|}\operatorname{sign}(f(x))$

iv. $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ mit $T(f)(x) = \frac{1}{1+x^2} f(x)$

Aufgabe 7. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen von

$$\left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq x_{m+1}^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\right\}.$$

Hinweis:
Die Vorlesung am kommenden Mittwoch, den 15. Dezember findet ausnahmsweise in Hörsaal B statt.