

Notizen zur Vorlesung

# Gewöhnliche Differentialgleichungen



G. Sweers

Wintersemester 08/09



# Inhaltsverzeichnis

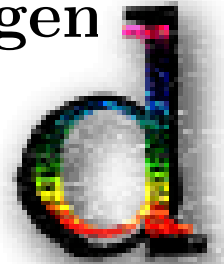
<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Modelle . . . . .	1
1.2	Explizite Lösungen . . . . .	4
1.2.1	Trennbar . . . . .	5
1.2.2	Linear erster Ordnung . . . . .	6
1.2.3	Homogen . . . . .	6
1.2.4	Bernoulli und Riccati . . . . .	7
1.2.5	Exakt . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Erste Qualitative Überlegungen</b>	<b>9</b>
2.1	Erster Ordnung . . . . .	9
2.1.1	Richtungsfeld . . . . .	9
2.1.2	Orthogonale Trajektorien . . . . .	10
2.2	Lösungen mit mehr Regularität . . . . .	12
2.3	Aus autonom folgt monoton . . . . .	13
2.4	Vergleich von Lösungen . . . . .	15
2.5	Eindeutigkeit . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Gleichungen höherer Ordnung und Systeme</b>	<b>21</b>
3.1	Gleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung . . . . .	21
3.2	Lineare Gleichungen und Systeme . . . . .	22
3.3	Eindeutigkeit für lineare Systeme . . . . .	23
3.4	Formelle Lösungen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten</b>	<b>29</b>
4.1	Einige Eigenschaften des Exponenten einer Matrix . . . . .	29
4.2	Berechnung des Exponenten einer Matrix . . . . .	29
4.3	Lineare Stabilität . . . . .	34
4.3.1	Klassifizierung in zwei Dimensionen . . . . .	37
4.3.2	Geometrische Zusammenhänge . . . . .	38
4.4	Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Approximationen</b>	<b>45</b>
5.1	Approximation einer Lösung . . . . .	45
5.1.1	Numerische Methoden zur Approximation . . . . .	45
5.1.2	Analytische Methoden zur Approximation . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Lokale Existenz einer Lösung</b>	<b>51</b>
6.1	Fixpunkte . . . . .	51
6.1.1	Wiederholung . . . . .	51

6.1.2	Funktionenfolgen . . . . .	52
6.1.3	Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit . . . . .	54
6.1.4	Ein Fixpunktsatz . . . . .	54
6.2	Existenz nach Picard-Lindelöf . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Globale Existenz einer Lösung</b>	<b>59</b>
7.1	Von lokal zu global . . . . .	59
7.2	Das Lemma von Grönwall . . . . .	63
7.3	Differentialgleichungen mit $\mathbb{R}$ als Existenzintervall . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Nicht-lineare und linearisierte Systeme</b>	<b>69</b>
8.1	Gleichgewichtspunkte . . . . .	69
8.2	Linearisieren . . . . .	71
8.3	Definition Stabilität für nicht-lineare Systeme . . . . .	75
8.4	Stabilität von Gleichgewichtspunkten . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Vergleich durch Linearisieren</b>	<b>79</b>
9.1	Algebraische Vorbereitung zum Beweis des Stabilitätssatzes . . . . .	79
9.2	Der Beweis des Stabilitätssatzes . . . . .	83
9.3	Linearisierungssatz . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Lotka, Volterra und Lyapunov</b>	<b>85</b>
10.1	Anwendungen in der Populationsdynamik . . . . .	85
10.1.1	Das Räuber-Beute oder Lotka-Volterra Modell . . . . .	85
10.1.2	Das kooperative Modell oder Mutualismus . . . . .	87
10.1.3	Das Wettbewerbsmodell . . . . .	88
10.2	Lyapunov . . . . .	89
10.3	Systeme in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ . . . . .	91
<b>11</b>	<b>Spezielles für zweite Ordnung</b>	<b>93</b>
11.1	Phasenebene . . . . .	93
11.2	Differentialgleichung für Trajektorien . . . . .	94
11.3	Feder und Pendel . . . . .	95
<b>12</b>	<b>Existenz nach Peano</b>	<b>101</b>
12.1	Gleichmäßig und gleichgradig . . . . .	101
12.2	Der Satz von Arzelà-Ascoli . . . . .	102
12.3	Ein vereinfachter Existenzsatz . . . . .	104
12.4	Existenz nach Peano . . . . .	106
<b>13</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>109</b>
13.1	Beispiele . . . . .	109
13.2	Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung . . . . .	110
13.3	Sturmsche Randwertaufgaben . . . . .	111
13.4	Greensche Funktion für die Sturmsche Randwertaufgabe . . . . .	113
13.5	Regularität . . . . .	116
13.6	Greensche Funktionen für allgemeine Randwertaufgaben . . . . .	117
<b>14</b>	<b>Nicht-lineare Randwertprobleme</b>	<b>121</b>
14.1	Lösungen durch Schießen . . . . .	121
14.2	Lösungen zwischen Ober- und Unterlösungen . . . . .	122

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 1

### Einführung



#### 1.1 Modelle

Eine gewöhnliche Differentialgleichung gibt eine Relation zwischen einer unbekanntem Funktion und deren Ableitung(en). Nun kann man unendlich viele solcher Gleichungen hinschreiben und um einigermaßen Struktur anzubringen, betrachtet man einfache Gleichungen die helfen, die auftretenden Phänomene zu verstehen. Andererseits betrachtet man auch Gleichungen, die ihre Bedeutung aufgrund der Anwendungen bekommen. Die Aufgabe eines Mathematikers ist es, aus der Differentialgleichung und Nebenbedingungen wie Rand- oder Anfangswerte die Eigenschaften der Lösungen herauszufinden. Eine Lösung ist zu verstehen als eine Funktion, welche die Gleichung und Nebenbedingung erfüllt. Nur relativ selten lässt sich eine explizite geschlossene Formel für die Lösung(en) herleiten.

**Bemerkung 1.0.1** *Differentialgleichungen bilden die Sprache für viele Prozesse aus der Physik, Mechanik, Biologie, Wirtschaft etc. Die Herleitung einer Gleichung, die einen derartigen Prozess beschreiben soll, ist ein Fach für sich. Das bedeutet nicht, dass diese Modellierung unabhängig ist von den mathematischen Grundlagen. Nur wenn die Lösung die Eigenschaften hat, die in der Anwendung beobachtet werden, kann das Modell richtig sein.*

Wir geben einige einfache Beispiele.

**Beispiel 1.1** *Ein fallender Apfel:*

$$h''(t) = -g.$$

*Die Gleichung trifft zu wenn man die Reibung vernachlässigt und nur solange der Apfel den Boden nicht berührt. Zusätzliche Bedingungen sind, wenn man den Apfel am Zeitpunkt  $t_0$  in Höhe  $h_0 > 0$  fallen lässt:  $h(t_0) = h_0$  und  $h'(t_0) = 0$ . Die Lösung zu diesem Anfangswertproblem ist leicht zu finden:*

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}g (t - t_0)^2.$$

*Wenn der Boden die Höhe 0 hat, dann gilt  $t \in [t_0, t_0 + \sqrt{2h_0/g}]$ .*

**Beispiel 1.2** Ein Fahrzeug bei Vollbremsung:

$$x''(t) = -c \operatorname{sign}(x'(t)).$$

Auch hierzu gibt es Anfangswerte wie zum Beispiel:  $x(0) = 0$  und  $x'(0) = v_0$ . Wenn die Geschwindigkeit positiv ist, hat man  $x''(t) = -c$  und es folgt  $x'(t) = v_0 - c t$  und  $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}c t^2$ . Für  $t = t_1 := v_0/c$  gilt  $x'(t_1) = 0$  und für  $t > t_1$  kann man eigentlich nur  $x'(t) = 0$  und  $x(t) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}c t_1^2 = \frac{1}{2}v_0^2/c$  als vernünftige Fortsetzung nehmen. Die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} v_0 t - \frac{1}{2}c t^2 & \text{für } t \in [0, t_1], \\ \frac{1}{2}v_0^2/c & \text{für } t > t_1, \end{cases}$$

ist nicht zweimal differenzierbar.

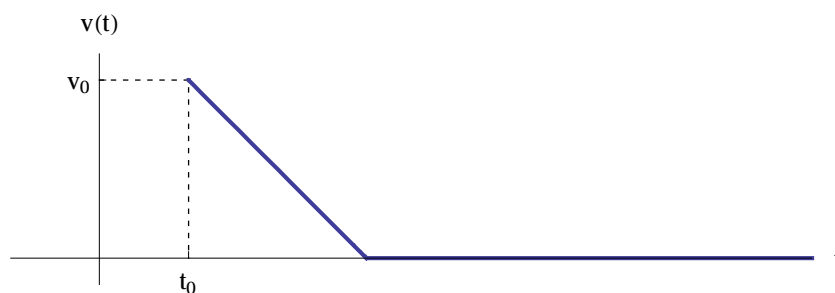


Abbildung 1.1: Profil der Geschwindigkeit  $v(t)$  bei einer Vollbremsung. Beim „Knick“ ist  $v$  nicht differenzierbar.

**Beispiel 1.3** Lineares Wachstum

$$y'(t) = c y(t).$$

Diese Differentialgleichung ist so ungefähr die einfachste. Für beliebige  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist

$$y(t) = \alpha e^{c t} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.

**Beispiel 1.4** Die logistische Gleichung (Wachstum mit Beschränkung)

$$y'(x) = c y(x) (1 - y(x)).$$

Lösungen sind

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ y(x) &= -1 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \alpha < 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} - \alpha} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \alpha > 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} + \alpha} && \text{für } x \in \left(\frac{1}{c} \ln \alpha, \infty\right), \\ \alpha > 0 : y(x) &= \frac{e^{cx}}{e^{cx} - \alpha} && \text{für } x \in \left(-\infty, \frac{1}{c} \ln \alpha\right). \end{aligned}$$

Es ist üblich als Lösung nur Funktionen zuzulassen, die auf einem Intervall definiert sind. Die letzten zwei Funktionen werden als unterschiedliche Lösungen betrachtet.

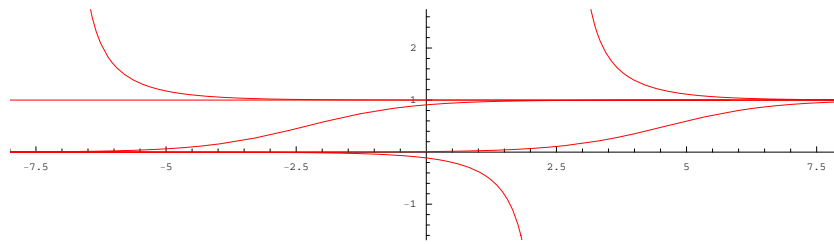


Abbildung 1.2: Skizze einiger Lösungen der logistischen Gleichung. Nur nicht-negative Lösungen entsprechen Größen die physikalisch vernünftig sind.

**Beispiel 1.5** Ein durchbiegender Balken:

$$\left( \frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{5/2}} \right)'' = f(x).$$

Nimmt man an, dass der Balken fast horizontal liegt, approximiert man das Model mit der Vereinfachung

$$y''''(x) = f(x).$$

Hier ist  $f$  die Kraftdichte und  $y$  die Auslenkung. Ist der Balken eingemauert an den Stellen 0 und  $\ell$ , dann hat man als Randbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y(\ell) = y'(\ell) = 0.$$

Liegt der Balken an beiden Seiten auf, dann passt

$$y(0) = y''(0) = y(\ell) = y''(\ell) = 0.$$

Ist es ein Springbrett im Schwimmbad, dann hat man

$$y(0) = y'(0) = y''(\ell) = y'''(\ell) = 0.$$

**Beispiel 1.6** Wasser in einem Eimer mit Loch:

$$h'(t) = -c\sqrt{h(t)}. \quad (1.1)$$

Der physikalische Satz von Torricelli besagt, dass die Geschwindigkeit mit dem das Wasser herausströmt, proportional zur Quadratwurzel der Höhe ist. Man findet die Lösungen

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{1}{2}c(t - t_0))^2 & \text{für } t \in [t_0, t_0 + \frac{2}{c}\sqrt{h_0}], \\ 0 & \text{für } t \in (t_0 + \frac{2}{c}\sqrt{h_0}, \infty). \end{cases}$$

Auch  $h(t) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist eine Lösung.

**Beispiel 1.7** Die Lösungen von

$$k'(t) = -c k(t) \quad (1.2)$$

sind  $k(t) = k_0 e^{-c(t-t_0)}$ . Wenn man nun vergleicht mit dem letzten Beispiel, dann soll einem auffallen, dass wenn man  $(t_1, k(t_1))$  kennt, man die Vergangenheit konstruieren kann. Die Differentialgleichung ist in positiver und negativer Zeitrichtung eindeutig lösbar. Die Lösungen von (1.1) sind es nicht.

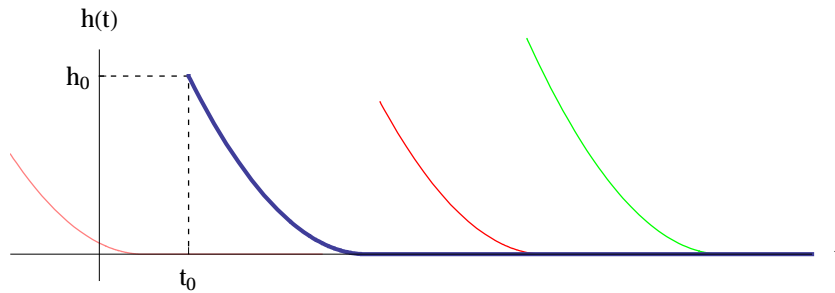


Abbildung 1.3: Skizze zu Beispiel 1.6. In endlicher Zeit ist der Eimer leer. Zwei Lösungen sind identisch für  $t$  genügend groß.

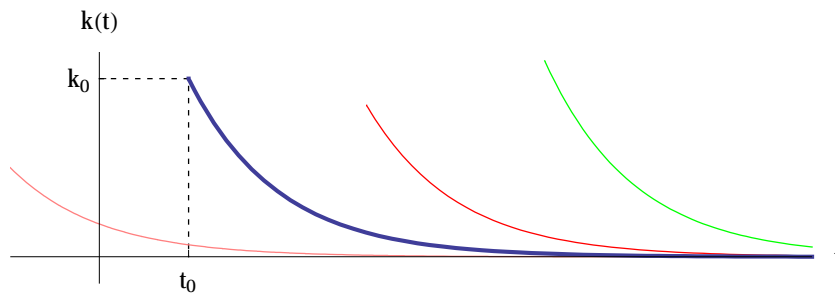


Abbildung 1.4: Skizze zu Beispiel 1.7. Wenn positiv gestartet wird, wird die Lösung zwar klein aber nie gleich 0. Unterschiedliche Lösungen treffen sich nicht.

## 1.2 Explizite Lösungen

Erstens definieren wir eine Lösung.

**Definition 1.8** Sei  $f : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und sei  $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ . Eine **Lösung** vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(\cdot, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

ist eine stetige Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $I$  ein Intervall derart, dass  $x_0 \in I \subset [a, b]$ . Die Funktion  $y$  erfüllt außerdem

1.  $y(x_0) = y_0 \in y(I) \subset [c, d]$ , und
2.  $y$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $y'(x) = f(x, y(x))$  für  $x \in I$  mit Ausnahme von höchstens isolierten Stellen.

$I$  heißt das **Existenzintervall der Lösung**. Das größt mögliche Existenzintervall nennt man das **maximale Existenzintervall der Lösung**.

**Bemerkung 1.8.1** Wenn  $f$  stetig ist, kann man zeigen, dass eine Lösung stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung für jedes  $x \in I^\circ$  erfüllt ist.

Wir stellen einige der explizit lösbaren Typen von Gewöhnliche Differentialgleichungen vor.



### 1.2.1 Trennbar

**Definition 1.9** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(x(t))g(t)$$

heißt *trennbar*.

Trennbar wird auch separierbar genannt.

**Algorithmus 1.10** [Für die Lösung einer trennbaren Dgl.]

0. Nullstellen von  $f$  sind konstante Lösungen: Wenn  $f(x_0) = 0$  dann ist  $x(t) = x_0$  für  $t \in \mathbb{R}$  eine Lösung.

1. Wenn  $f(x_0) \neq 0$  trennt man durch

$$\frac{1}{f(x(t))}x'(t) = g(t).$$

2. Formale Integration und Substitution  $x = x(s)$ :

$$\int^{x(t)} \frac{1}{f(x)} dx = \int^t \frac{1}{f(x(s))} x'(s) ds = \int^t g(s) ds.$$

3. Man suche eine Stammfunktion<sup>1</sup>  $H$  zu  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  und eine Stammfunktion  $G$  zu  $s \mapsto g(s)$  und es folgt

$$H(x(t)) = G(t) + c$$

mit  $c$  eine Konstante.

4. Wenn möglich invertiert man  $H$ :

$$x(t) = H^{\text{inv}}(G(t) + c)$$

Die Lösung ist erst vollständig wenn auch das Existenzintervall beschrieben wird.

**Beispiel 1.11** Man finde die Lösungen zu

$$y'(x) = 1 + y(x)^2.$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar, denn man kann sie schreiben als

$$\frac{1}{1 + y(x)^2} y'(x) = 1.$$

Stammfunktionen zu  $y \mapsto \frac{1}{1+y^2}$  und  $x \mapsto 1$  ergeben

$$\arctan(y(x)) = x + c$$

und nach invertieren folgen die Lösungen für  $c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \tan(x + c).$$

Die zugehörige Existenz-Intervalle findet man durch  $x + c = \pm \frac{1}{2}\pi$ :

$$x \in \left( -\frac{1}{2}\pi - c, \frac{1}{2}\pi - c \right).$$

---

<sup>1</sup>Stammfunktionen finden ist eine Arbeit, die Computer-Algebra Programme wie Maple oder Mathematica sehr schnell ausführen können. Das heißt, wenn es eine explizite Stammfunktion gibt, dann wird sie schnell gefunden. Mathematica hat sogar eine online Integrator: <http://integrals.wolfram.com/>

## 1.2.2 Linear erster Ordnung

**Definition 1.12** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t) x(t) + g(t)$$

heißt *linear erster Ordnung*.

**Algorithmus 1.13** [Für die Lösung einer linearen Dgl. erster Ordnung]

1. Man löst die reduzierte Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t) x(t).$$

Diese ist trennbar und die Lösungen sind  $x(t) = C e^{F(t)}$  mit  $C \in \mathbb{R}$  und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

2. Man substituiert  $x(t) = C(t) e^{F(t)}$  (dieser Trick heißt Variation der Konstanten). Die Differentialgleichung wird

$$C'(t) e^{F(t)} + C(t) e^{F(t)} f(t) = f(t) C(t) e^{F(t)} + g(t).$$

und vereinfacht zu  $C'(t) = g(t) e^{-F(t)}$ .

3. Man suche eine Stammfunktion

$$C(t) = c + \int_{t_0}^t g(s) e^{-F(s)} ds.$$

## 1.2.3 Homogen

**Definition 1.14** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$

heißt *homogen*.

**Algorithmus 1.15** [Für die Lösung einer homogenen Dgl.]

1. Man substituiert  $u(t) = x(t)/t$  und findet

$$t u'(t) + u(t) = f(u(t)).$$

2. Diese Differentialgleichung lässt sich trennen,

$$u'(t) = (f(u(t)) - u(t)) \frac{1}{t},$$

und wird weiter als trennbar gelöst.

3. Nach lösen  $u(t)$  wieder ersetzen durch  $x(t)/t$ .

### 1.2.4 Bernoulli und Riccati

**Definition 1.16** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(t) x(t) + g(t) x(t)^m$$

mit  $m \notin \{0, 1\}$  ist nach **Bernoulli** benannt.

**Algorithmus 1.17** [Für die Lösung einer Dgl. von Bernoulli]

1. Man substituiert  $x(t) = u(t)^\alpha$ , findet

$$\alpha u'(t)u(t)^{\alpha-1} = f(t) u(t)^\alpha + g(t) u(t)^{\alpha m},$$

und vereinfacht zu

$$\alpha u'(t) = f(t) u(t) + g(t) u(t)^{\alpha(m-1)+1}.$$

2. Nimmt man  $\alpha(m-1)+1 = 0$  wird die Differentialgleichung linear erster Ordnung.

**Definition 1.18** Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = h(t) + f(t) x(t) + g(t) x(t)^2$$

ist nach **Riccati** benannt.

**Algorithmus 1.19** [Für die Lösung einer Dgl von Riccati]

1. Diese Differentialgleichung kann man explizit lösen, wenn man das Glück hat eine Lösung zu sehen. Sei  $\tilde{x}(t)$  diese eine Lösung. Man substituiere  $x(t) = \tilde{x}(t) + y(t)$  und finde

$$\tilde{x}'(t) + y'(t) = h(t) + f(t) (\tilde{x}(t) + y(t)) + g(t) (\tilde{x}(t) + y(t))^2$$

und weil  $\tilde{x}$  eine Lösung ist, folgt nach Vereinfachung

2. eine Bernoulli Differentialgleichung:

$$y'(t) = (2g(t) \tilde{x}(t) + f(t)) y(t) + g(t) y(t)^2.$$

### 1.2.5 Exakt

**Definition 1.20** Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} F(x(t), t) = 0$$

heißt **exakt**.

Eine solche Differentialgleichung hat also die Form

$$\partial_1 F(x(t), t) x'(t) + \partial_2 F(x(t), t) = 0.$$

Man sieht nicht  $F$  sondern die beiden partiellen Ableitungen.

**Algorithmus 1.21** [Für die Lösung einer exakten Dgl.]

1. Lösungen sind  $F(x(t), t) = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .
2. Wenn möglich löse man  $x(t)$ .

Das Problem bei exakten Differentialgleichungen ist wie man sie erkennt. Man bekommt sie selten in der Form wie oben, sondern hat eine Gleichung wie

$$G(x(t), t) x'(t) + H(x(t), t) = 0. \quad (1.3)$$

**Lemma 1.22 (eine notwendige Bedingung für eine exakte Dgl.)** Nehme an, dass  $G$  und  $H$  stetig differenzierbar sind. Wenn die Differentialgleichung (1.3) exakt ist, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, t). \quad (1.4)$$

**Beweis.** Es soll gelten

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = G(x, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) = H(x, t).$$

Sind die Funktionen  $G$  und  $H$  stetig differenzierbar, dann folgt mit dem Vertauschungssatz von Schwarz, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, t). \quad (1.5)$$

■

Ist das Gebiet einfach zusammenhängend, dann kann man zeigen, dass (1.4) nicht nur notwendig sondern auch ausreichend für die Exaktheit ist.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann findet man  $F(x, t)$  als eine Stammfunktion von  $x \mapsto G(x, t)$ :

$$F(x, t) = \int^x G(\xi, t) d\xi + C(t).$$

Die Funktion  $C$  findet man durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int^x G(\xi, t) d\xi \right) + C'(t) = H(x, t).$$

Wenn eine Differentialgleichung nicht exakt ist, kann man versuchen, sie exakt zu machen, indem man sie mit einer geschickt gewählten Funktion multipliziert. So eine geschickt gewählte Funktion heißt ein **integrierenden Faktor**. Die Suche nach einer solchen Funktion ist meistens hoffnungslos. Versucht man nämlich für (1.3) ein integrierenden Faktor  $\mu(x, t)$  zu finden, dann soll nach (1.5) gelten, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu(x, t) G(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(x, t) H(x, t))$$

und das wird

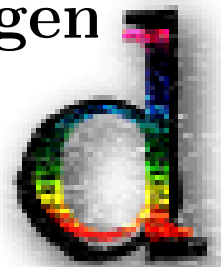
$$\mu_t G + \mu G_t = \mu_x H + \mu H_x,$$

eine partielle Differentialgleichung.

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 2

## Erste Qualitative Überlegungen



### 2.1 Erster Ordnung

Die expliziten Methoden der letzten Woche hatten alle Differentialgleichungen erster Ordnung im Visier.

**Definition 2.1** Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die Zahl der höchsten Ableitung.

**Beispiel 2.2** Die Differentialgleichung  $x'' = -c \operatorname{sign}(x')$  hat Ordnung 2. Wenn man jedoch  $v = x'$  setzt, findet man  $v' = -c \operatorname{sign}(v)$  mit Ordnung 1.

Für Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es einige spezielle Methoden um auf eine Idee zu kommen, wie die Lösungen ausfallen. Viele Überlegungen fangen an, indem man versucht sich eine graphische Vorstellung zu machen.

#### 2.1.1 Richtungsfeld

**Definition 2.3** Betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (2.1)$$

mit  $f$  eine Funktion von  $R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Das **Richtungsfeld** für diese Differentialgleichung ist definiert durch  $v : R \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Das Richtungsfeld ist ein Vektorfeld und dieses Vektorfeld ist derartig, das eine Lösung der Differentialgleichung mit  $y(x_0) = y_0$  an der Stelle  $x_0$  genau  $v(x_0, y_0)$  als Tangentialrichtung hat. Anders gesagt: man kann eine Skizze einer Lösung anfertigen, indem man die Vektoren vom Vektorfeld verfolgt.

**Beispiel 2.4** Die Differentialgleichung  $y'(x) = \frac{(x^2-y)y(2-y)}{1+x^2+y^2}$  kann man höchstwahrscheinlich nicht mit einer expliziten Formel lösen. Wenn man das Richtungsfeld anschaut kann man vermuten, dass die Lösung mit  $y(0) = 1$  ganz  $\mathbb{R}$  als Existenzintervall hat und dass außerdem gilt  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$ . Eine Lösung mit  $y(1) = -1$  scheint eher ein Existenzintervall vom Typ  $(-\infty, T)$  zu haben.

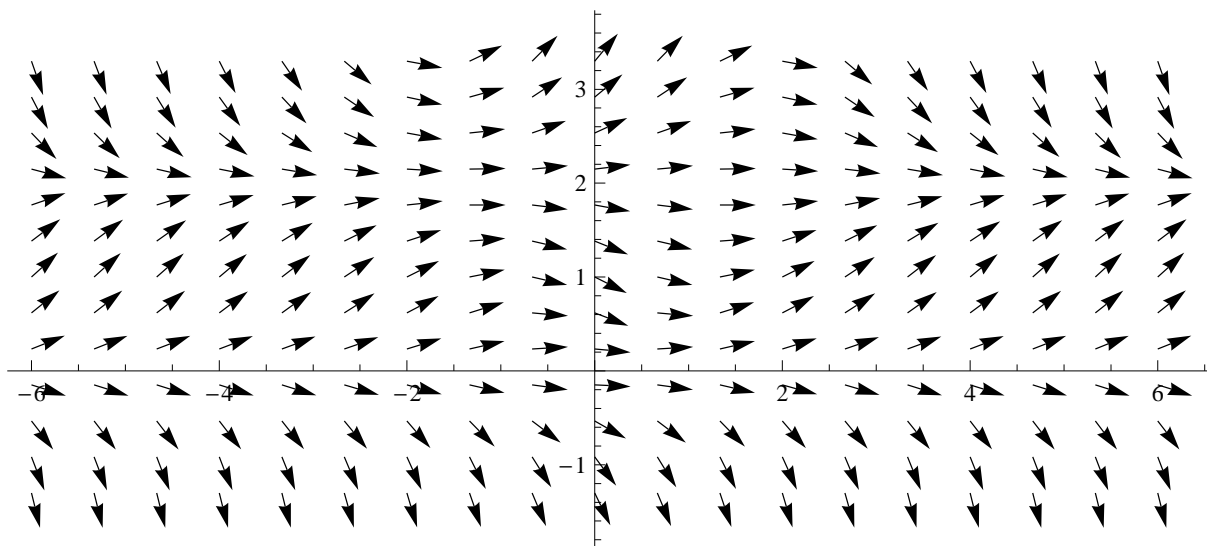


Abbildung 2.1: Das Vektorfeld aus Beispiel 2.4. Aus praktischen Gründen sind die Vektoren normalisiert, das heißt, statt  $v$  ist  $v/\|v\|$  eingezeichnet.

## 2.1.2 Orthogonale Trajektorien

**Differentialgleichung für eine Kurvenschar** Eine Kurvenschar in  $\mathbb{R}^2$  ist eine Familie von (unterschiedlichen) Kurven<sup>1</sup>. Zum Beispiel ist  $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = cx^2\}_{c \in \mathbb{R}}$  die Familie aller Parabeln mit Minimum/Maximum in  $(0, 0)$  mit zusätzlich auch noch der  $x$ -Achse. Diese Kurvenschar hat die besondere Eigenschaft, dass  $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$  eindeutig überdeckt wird: durch jeden Punkt  $(x, y)$  mit  $x \neq 0$  geht genau eine Kurve. In diesem Fall werden die Kurven parametrisiert durch

$$y = y_c(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

wobei  $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch  $y_c(x) = cx^2$ . Schreibt man dies als

$$\frac{y_c(x)}{x^2} = c,$$

dann sieht man, dass diese Kurven die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{x^2} \right) = 0.$$

Diese exakte Differentialgleichung kann man auch schreiben als

$$\frac{y'(x)}{x^2} - 2\frac{y(x)}{x^3} = 0$$

<sup>1</sup>Eine Kurve in  $\mathbb{R}^2$  kann man auffassen als eine Abbildung  $k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  wobei  $I$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  ist und  $k$  eine stetige Funktion. Oft wird auch nur die Bildmenge  $\{k(t); t \in I\}$  als Kurve benannt.

oder als

$$y'(x) = \frac{2}{x}y(x).$$

**Orthogonale Kurvenschare** Wenn man eine derartige Kurvenschar hat, kann man sich fragen, ob es möglich ist eine zweite Kurvenschar zu finden, deren Kurven die aus der ersten Familie senkrecht schneiden.

Sei nun die Kurvenschar gegeben durch

$$f(x, y) = c.$$

Wenn man  $x \mapsto y(x)$  lokal so eine Kurve beschreiben läßt, also  $f(x, y(x)) = c$ , dann folgt

$$0 = \frac{d}{dx}f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) \quad (2.2)$$

Parametrisieren wir die senkrecht schneidenden Kurven durch  $x \mapsto Y(x)$ , dann gilt wenn  $y = y(x)$  und  $y = Y(x)$  sich schneiden in  $(x, y)$ , dass

$$y(x) = y = Y(x)$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ Y'(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Diese letzte Gleichung liefert  $y'(x) = \frac{-1}{Y'(x)}$  und besagt, dass die betreffenden Tangentialvektoren senkrecht aufeinander stehen. Kombinieren wir die letzten 3 Gleichungen, folgt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, Y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x)) \frac{-1}{Y'(x)}$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y(x)) Y'(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, Y(x)).$$

**Definition 2.5** Sei  $\mathcal{F} = \{(x, y); f(x, y) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$  eine Kurvenschar die  $\mathbb{R}^2$  (oder einen Teil von  $\mathbb{R}^2$ ) überdeckt. Man nennt die Kurvenschar  $\mathcal{G} = \{(x, y); g(x, y) = c\}_{c \in \mathbb{R}}$  die Familie der **orthogonalen Trajektorien** zu  $\mathcal{F}$ , wenn die Kurven aus  $\mathcal{G}$  die aus  $\mathcal{F}$  senkrecht schneiden.

**Beispiel 2.6** Wir suchen die **orthogonale Trajektorien** zu  $\{(x, y); y = ce^{2x}\}_{c \in \mathbb{R}}$ .

1. Man löse nach  $c$ ;

$$ye^{-2x} = c.$$

2. Man nehme an  $y = y(x)$  (oder  $x = x(y)$ ) und schreibe die Differentialgleichung für diese Kurven:

$$0 = \frac{d}{dx}(y(x)e^{-2x}) = y'(x)e^{-2x} - 2y(x)e^{-2x}.$$

3. Man ersetze  $y(x)$  durch  $Y(x)$  und  $y'(x)$  durch  $-1/Y'(x)$ :

$$0 = \frac{-1}{Y'(x)}e^{-2x} - 2Y(x)e^{-2x}.$$

4. Man löst

$$2Y(x)Y'(x) = -1$$

und findet

$$Y(x)^2 = c - x.$$

Die orthogonale Trajektorien sind  $\{(x, y); y^2 + x = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ .

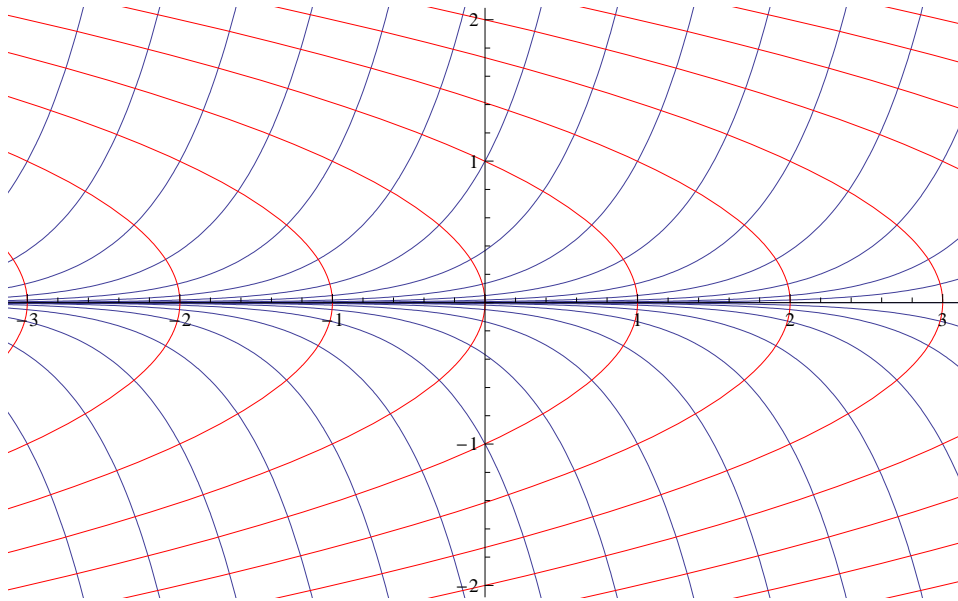


Abbildung 2.2: In Blau die Kurven  $F = \{y = ce^{2x}\}_{c \in \mathbb{R}}$ ; in Rot  $G = \{y^2 + x = c\}_{c \in \mathbb{R}}$ . Siehe Beispiel 2.6.

## 2.2 Lösungen mit mehr Regularität

Mit der Regularität einer Funktion ist gemeint wie oft sie differenzierbar ist. Um Differentialgleichungen

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (2.3)$$

betrachten zu können wo  $f$  nicht unbedingt stetig sein muss, haben wir Lösungen definiert als stetige Funktionen, die mit Ausnahme von isolierten Stellen differenzierbar sind und die Differentialgleichung erfüllen.

**Lemma 2.7** Betrachte (2.3). Wenn  $f$  stetig ist, ist jede Lösung stetig differenzierbar.

Wenn  $f$  stetige  $n$ -te Ableitungen hat ( $n \in \mathbb{N}^+$ ), hat jede Lösung stetige  $n + 1$ -te Ableitungen.

**Beweis.** Sei  $f$  stetig und  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung. Nennen wir die isolierten Ausnahmestellen  $A$ . Wenn  $(c, d) \cap A = \emptyset$ , dann ist  $x \mapsto f(x, y(x))$  eine stetige Funktion als Zusammensetzung stetiger Funktionen und ist  $x \mapsto y'(x)$  stetig, das heißt,  $y$  ist stetig differenzierbar auf  $(c, d)$ .

Wenn  $a_i \in A$  dann gilt

$$y'_r(a_i) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(a_i + h) - y(a_i)}{h}.$$



Weil die Funktion  $y$  stetig ist auf  $[a_i, a_i + \varepsilon]$  und differenzierbar in  $(a_i, a_i + \varepsilon)$ , liefert der Mittelwertsatz, dass es  $\xi \in (a_i, a_i + h)$  gibt mit

$$\frac{y(a_i + h) - y(a_i)}{h} = y'(\xi) = f(\xi, y(\xi)).$$

Weil  $\lim_{\xi \rightarrow a_i} f(\xi, y(\xi)) = f(a_i, y(a_i))$  existiert die rechte Ableitung von  $y$  in  $a_i$ . Ähnlich existiert auch die linke Ableitung und weil sie gleich sind existiert  $y'(a_i)$  und es gilt sogar

$$y'(a_i) = f(a_i, y(a_i)),$$

ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $a_i$  eine Ausnahmestelle war.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion nach  $n$ . ■

## 2.3 Aus autonom folgt monoton

Betrachten wir die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung  $y'(x) = f(x, y(x))$ .

**Definition 2.8** Die Differentialgleichung (2.3) heißt **autonom**, wenn  $f(x, y)$  unabhängig von  $x$  ist, also

$$y'(x) = f(y(x)).$$

**Lemma 2.9** Stückweise stetig differenzierbare Lösungen<sup>2</sup> einer autonomen Differentialgleichung erster Ordnung sind monoton.

**Beweis.** Sei  $I \ni x \mapsto y_1(x)$  eine nicht monotone Lösung von  $y'(x) = f(y(x))$ . Dann gibt es  $a, b, c \in I$  mit  $a < b < c$  und entweder  $\max(y(a), y(c)) < y(b)$  oder  $\min(y(a), y(c)) > y(b)$ . Nehmen wir an  $\max(y(a), y(c)) < y(b)$ . Weil  $y$  stetig ist, kann man den Zwischenwertsatz verwenden um  $a$  oder  $c$  so zu ersetzen, dass wir annehmen dürfen  $y(a) = y(c)$ . Wir haben erlaubt, dass eine Lösung isolierte Stellen hat, wo die Differentialgleichung nicht erfüllt ist. Weil  $[a, c]$  beschränkt ist, kann dieses Intervall höchstens endlich vieler solcher Stellen haben. Den Zwischenwertsatz erlaubt es uns  $a_1 \in (a, b)$  und  $c_1 \in (b, c)$  zu finden derart, dass

$$y(a_1) = y(c_1) = \frac{y(a) + y(b)}{2}.$$

Dieses Aufteilen können wir so oft wiederholen, dass es Intervalle  $[a_*, b_*]$  und  $[b^*, c^*]$  gibt mit

$$y(a_*) = y(c^*) \neq y(b_*) = y(b^*)$$

und die keine Problemstelle enthalten.

Der Mittelwertsatz ergibt ein  $x_* \in [a_*, b_*]$  mit

$$y'(x_*) = \frac{y(b_*) - y(a_*)}{b_* - a_*} > 0.$$

Benutzen wir wiederum der Zwischenwertsatz um eine Lösung von  $y(x_*) = y(x^*)$  mit  $x^* \in [b^*, c^*]$  zu finden, und nehmen wir die maximale (entweder gibt es endlich viele

<sup>2</sup>Eine stetige Funktion  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn man  $[a, b]$  in endlich viele Teilintervalle aufteilen kann:

$$[a, b] = [a = a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_k, a_{k+1} = b]$$

und auf jedem dieser Teilintervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  gibt es eine stetige Funktion  $g_i$  mit  $g_i = h'$  auf  $(a_i, a_{i+1})$ .

Lösungen und man nimmt den größten, oder es gibt unendlich viele, man nimmt eine Maximalfolge, verwendet den Satz von Bolzano-Weierstrass und die Stetigkeit von  $y$ ) folgt

$$y'(x^*) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y(x^* + h) - y(x^*)}{h} \leq 0.$$

Die Differentialgleichung liefert

$$0 < y'(x_*) = f(y(x_*)) = f(y(x^*)) = y'(x^*) \leq 0,$$

einen Widerspruch. ■

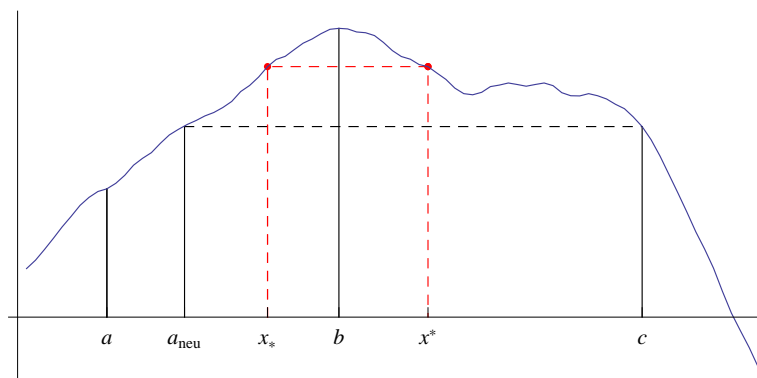


Abbildung 2.3: So kann der Graphen der Lösung einer autonomen Differentialgleichung erster Ordnung also nicht sein.

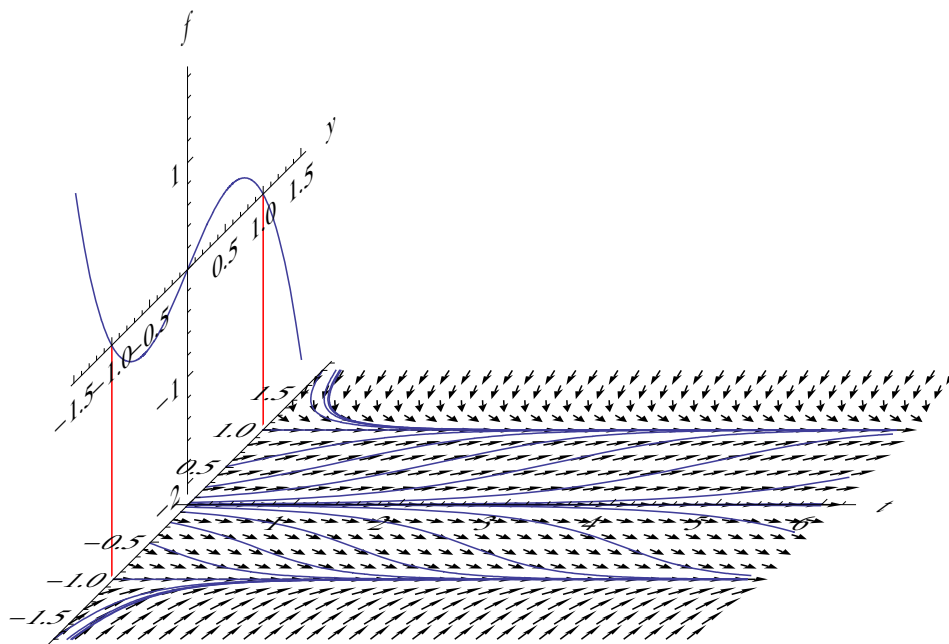


Abbildung 2.4: Bild zu Beispiel 2.10. Ein Versuch, die Funktion  $y \mapsto f(y)$ , das Richtungsfeld und einige Lösungen  $t \mapsto y(t)$  von  $y' = f(y)$  in einem Bild darzustellen.

**Beispiel 2.10** Betrachten wir die autonome Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) (1 - y(t)^2).$$

Die Funktion  $f(y) = y(1 - y^2)$  ist positiv für  $y \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$  und negativ für  $y \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ . Das bedeutet, dass Lösungen mit Werten in  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  steigen und mit Werten in  $(-1, 0) \cup (1, \infty)$  fallen. Siehe auch Abbildung 2.4.

## 2.4 Vergleich von Lösungen

Wir haben einige Sorten Differentialgleichungen erster Ordnung gesehen die explizite Lösungsverfahren haben. Die meisten kann man aber nicht explizit lösen. Man kann aber versuchen nicht-lösbare mit lösbare zu vergleichen.

**Beispiel 2.11** Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = t^2 + x(t)^2, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung ist leider nicht lösbar mit den elementaren Funktionen, denen man in Analysis 1 oder 2 begegnet ist. Man kann versuchen die Lösung zu vergleichen mit der Lösung von

$$\begin{cases} y'(t) = t^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Wenn eine Lösung  $t \mapsto x(t)$  existiert, dann gilt  $t^2 \leq t^2 + x(t)^2$  und so auch  $y'(t) \leq x'(t)$ . Dann gilt auch

$$(x(t) - y(t)) - (x(0) - y(0)) = \int_0^t (x'(s) - y'(s)) ds \geq 0 \text{ für } t \geq 0$$

und folgt

$$x(t) \geq y(t) = \frac{1}{3}t^3.$$

Es folgt (wenn  $x(1)$  existiert), dass  $x(1) \geq \frac{1}{3}$ .

Als nächstes vergleichen wir mit

$$\begin{cases} z'(t) = 1 + z(t)^2, \\ z(1) = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Für  $t \geq 1$  und  $x(t) \geq z(t)$  gilt

$$t^2 + x(t)^2 \geq 1 + z(t)^2$$

und es folgt  $x'(t) \geq z'(t)$ . Das würde bedeuten, dass  $x$  schneller wächst als  $z$  und also, dass auch  $x \geq z$  erhalten bleibt. Diese Schlussfolgerung scheint etwas von einem Zirkelschluss zu haben.

In dem folgenden Satz betrachten wir die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

**Theorem 2.12** Nehme an es gibt Lösungen  $x, y : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$  von (2.4) die stückweise stetig differenzierbar sind. Seien  $f$  und  $g$  derartig, dass es  $L \geq 0$  gibt mit

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) \geq -L |\xi - \eta| \text{ für } t \in [0, a) \text{ und } \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Wenn  $x_0 > y_0$  dann gilt

$$x(t) > y(t) \text{ für } t \in [0, a).$$

Wenn  $x_0 \geq y_0$  dann gilt

$$x(t) \geq y(t) \text{ für } t \in [0, a).$$

**Bemerkung 2.12.1** Schaut man den Beweis an, dann sieht man, dass es reicht wenn wir annehmen, dass  $f$  und  $g$  die folgende Bedingung erfüllen: Für jedes Intervall  $[-M, M]$  gibt es  $L_M \in \mathbb{R}$  mit

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) \geq -L_M |\xi - \eta| \text{ für } t \in [0, a) \text{ und } \xi, \eta \in [-M, M].$$

**Beweis.** Nehmen wir an  $x_0 > y_0$ . Wenn  $x - y$  eine Nullstelle in  $[0, a)$  hat, hat sie, weil  $x$  und  $y$  stetige Funktionen sind, eine kleinste positive Nullstelle die wir  $t_0$  nennen werden. Für  $t \in [0, t_0]$  gilt, mit möglicher Ausnahme von isolierten Stellen, dass

$$x'(t) - y'(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \geq -L(x(t) - y(t))$$

und so auch

$$\frac{d}{dt} (e^{Lt} (x(t) - y(t))) = e^{Lt} ((x'(t) - y'(t)) + L(x(t) - y(t))) \geq 0.$$

Das liefert uns

$$\begin{aligned} e^{Lt_0} (x(t_0) - y(t_0)) - (x_0 - y_0) &= \\ = [e^{Lt} (x(t) - y(t))]_{t=0}^{t_0} &= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} (e^{Lt} (x(t) - y(t))) dt \geq 0. \end{aligned}$$

An isolierten Stellen, wo  $x - y$  nicht differenzierbar ist, kommt man mit Stetigkeit vorbei. Wir finden

$$x(t_0) - y(t_0) = e^{-Lt_0} (x_0 - y_0) > 0,$$

einen Widerspruch.

Nun der Fall  $x_0 = y_0$ . Wenn es  $t_1 \in [0, a)$  gibt mit  $x(t_1) < y(t_1)$ , dann gibt es einen Intervall  $[t_0, t_1] \subset [0, t_1]$  mit  $x(t_0) = y(t_0)$  und

$$x(t) < y(t) \text{ für } t \in (t_0, t_1].$$

In diesem Intervall gilt

$$x'(t) - y'(t) = f(t, x(t)) - g(t, y(t)) \geq -L(y(t) - x(t))$$

und so auch

$$\frac{d}{dt} (e^{-Lt} (x(t) - y(t))) = e^{-Lt} ((x'(t) - y'(t)) - L(x(t) - y(t))) \geq 0.$$

Das liefert uns

$$\begin{aligned} e^{-Lt_1} (x(t_1) - y(t_1)) &= e^{-Lt_1} (x(t_1) - y(t_1)) - e^{-Lt_0} (x(t_0) - y(t_0)) = \\ = [e^{-Lt} (x(t) - y(t))]_{t=t_0}^{t_1} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (e^{-Lt} (x(t) - y(t))) dt \geq 0, \end{aligned}$$

und wiederum einen Widerspruch ■

Die Bedingung in (2.5) scheint vielleicht etwas mühsam. Einen Hinweis wie man so etwas beweist, liefert die folgende Überlegung:

$$f(t, \xi) - g(t, \eta) = f(t, \xi) - f(t, \eta) + f(t, \eta) - g(t, \eta).$$

- Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist, kann man  $f(t, \xi) - f(t, \eta)$  abschätzen:

$$f(t, \xi) - f(t, \eta) = \frac{f(t, \xi) - f(t, \eta)}{\xi - \eta} (\xi - \eta) \geq -L |\xi - \eta|$$

wenn man

$$L = \max_{y \in [-M, M]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|$$

setzt. Der Mittelwertsatz sagt aus: es gibt  $y \in (\xi, \eta)$  mit

$$\frac{f(t, \xi) - f(t, \eta)}{\xi - \eta} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y).$$

- Die zweite Hälfte kann man direkt vergleichen, da wir nur noch mit  $t$  und  $\eta$  zu tun haben.

Diese Beobachtungen führen zum folgenden Ergebnis.

**Korollar 2.13** *Nehme an, es gibt Lösungen  $x, y : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$  von (2.4), die stückweise stetig differenzierbar sind. Wenn entweder  $f$  oder  $g$  stetig differenzierbar ist und wenn außerdem gilt*

$$f(t, \eta) \geq g(t, \eta) \text{ für } t \in [0, a) \text{ und } \eta \in \mathbb{R},$$

dann folgt:

$$x_0 > y_0 \implies x(t) > y(t) \text{ für alle } t \in [0, a),$$

$$x_0 \geq y_0 \implies x(t) \geq y(t) \text{ für alle } t \in [0, a).$$

**Bemerkung 2.13.1** *Man kann dieses Ergebnis so beschreiben: wenn rechte Seiten und Anfangswerte die gleiche Anordnung haben, dann bleibt diese Anordnung erhalten bei den betreffenden Lösungen.*

*Die Bedingung, dass mindestens eine der beiden rechten Seiten differenzierbar sein muss, kann man ohne weiteres weglassen.*

Man kann dieses Korollar verwenden um das Beispiel 2.11 ohne Zirkelschluss weiterzuführen.

## 2.5 Eindeutigkeit

**Beispiel 2.14** *Wir betrachten die Differentialgleichung*

$$y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}.$$

*Diese Differentialgleichung ist trennbar und man findet  $y(t) = 0$  oder*

$$\frac{y'(t)}{\sqrt[3]{y(t)}} = 1.$$

Diese letzte Möglichkeit liefert

$$\frac{3}{2} |y(t)|^{2/3} = t - c$$

und

$$y(t) = \pm \left(\frac{2}{3} (t - c)\right)^{3/2}.$$

Wir finden als Lösungen:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < c \\ \left(\frac{2}{3} (t - c)\right)^{3/2} & \text{für } t \geq c, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$y(t) = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < c \\ -\left(\frac{2}{3} (t - c)\right)^{3/2} & \text{für } t \geq c, \end{cases} \quad (2.7)$$

Man findet mehrere Lösungen für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt[3]{y(t)}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

denn nicht nur  $y(t) = 0$  sondern auch für jedes  $c \geq 0$  ist  $y$  in (2.6) und (2.7) eine Lösung.

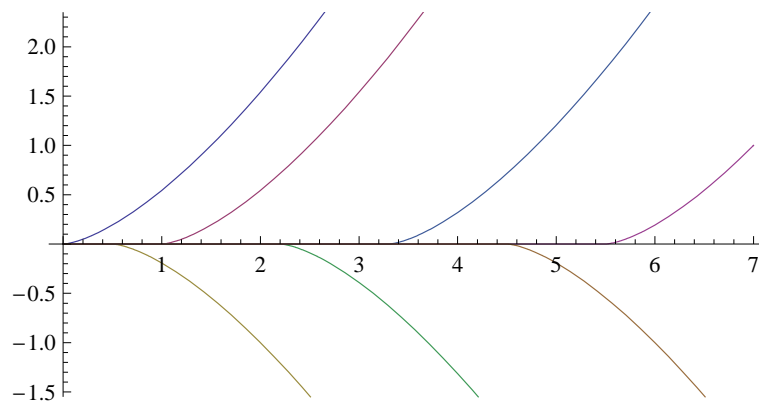


Abbildung 2.5: Skizzen zu einigen Lösungen des Anfangswertproblems (2.8).

Ein Problem, dass mehrere Lösungen bietet, ist „physikalisch“ nicht gewünscht und bedeutet meistens, dass das Model nicht das richtige ist.

Eine direkte Folge von Theorem 2.12 für

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

ist:

**Korollar 2.15 (Eindeutigkeit)** Sei  $f$  stetig und derart, dass es für jedes  $M \in \mathbb{R}$  ein  $L$  gibt mit

$$|f(t, \xi) - f(t, \eta)| \leq L |\xi - \eta| \text{ für } t \in [0, a] \text{ und } \xi, \eta \in [-M, M] \quad (2.10)$$

Dann hat das Anfangswertproblem (2.9) höchstens eine Lösung  $y : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Wenn es zwei verschiedene Lösungen gibt, nennen wir sie  $y_1$  und  $y_2$  mit  $y_1(0) = y_2(0)$ , dann gilt auch  $y_1(0) \geq y_2(0)$  und folgt es aus Theorem 2.12, dass  $y_1(t) \geq y_2(t)$  für  $t \in [0, a)$ . Weil auch  $y_2(0) \geq y_1(0)$  gilt, folgt ebenso, dass  $y_2(t) \geq y_1(t)$  für  $t \in [0, a)$ . Also hat man  $y_1(t) = y_2(t)$  für  $t \in [0, a)$  und gibt es höchstens eine Lösung. ■

**Kriterium 2.16** Hadamard nannte ein Problem *wohldefiniert*, wenn es die folgende Bedingungen erfüllt:

- Es hat mindestens eine Lösung (**Existenz**).
- Es hat höchstens eine Lösung (**Eindeutigkeit**).
- Wenn man das Problem ein wenig stört, wird sich die Lösung auch nur ein wenig ändern (**Stetige Abhängigkeit der Parameter**).

In dieses Licht ist das letzte Korollar ein sehr wichtiges Ergebnis: Wir haben ein Kriterium, das die Eindeutigkeit garantiert. Wenn wir die Existenz bewiesen haben, können wir sogar die stetige Abhängigkeit der Anfangswerte folgern.

**Korollar 2.17 (Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte)** Sei  $f$  stetig und derart, dass es für jedes  $M \in \mathbb{R}$  ein  $L$  gibt mit

$$|f(t, \xi) - f(t, \eta)| \leq L |\xi - \eta| \text{ für } t \in [0, a] \text{ und } \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Seien  $y_a, y_b : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  Lösungen von (2.9) mit Anfangswerte  $y_{a,0}, y_{b,0} \in \mathbb{R}$ . Dann folgt

$$|y_a(t) - y_b(t)| \leq e^{Lt} |y_{a,0} - y_{b,0}| \text{ für } t \in [0, a]. \quad (2.12)$$

**Beweis.** Aus (2.11) folgt für  $\xi \geq \eta$ , dass

$$f(t, \xi) - f(t, \eta) - L(\xi - \eta) \leq L|\xi - \eta| - L(\xi - \eta) = 0.$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt aus  $y_a(0) > y_b(0)$  dass  $y_a(t) > y_b(t)$  für  $t \in [0, a]$ . Nehmen wir an, dass  $y_a(0) > y_b(0)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} e^{-Lt} (y_a(t) - y_b(t)) - (y_a(0) - y_b(0)) &= \int_0^t \frac{d}{ds} (e^{-Ls} (y_a(s) - y_b(s))) ds \\ &= \int_0^t e^{-Ls} ((y'_a(s) - y'_b(s)) - L(y_a(s) - y_b(s))) ds = \\ &= \int_0^t e^{-Ls} ((f(s, y_a(s)) - f(s, y_b(s))) - L(y_a(s) - y_b(s))) ds \leq 0, \end{aligned}$$

und es gilt

$$y_a(t) - y_b(t) \leq e^{Lt} (y_a(0) - y_b(0)) = e^{Lt} (y_{a,0} - y_{b,0}).$$

Für  $y_a(0) < y_b(0)$  gilt ähnliches (man vertausche  $a$  und  $b$ ) und wir finden (2.12). ■

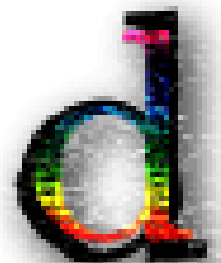




# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 3

# Gleichungen höherer Ordnung und Systeme



### 3.1 Gleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung

Wir haben Bekanntschaft gemacht mit gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Der nächste Schritt wäre, ein etwas breiteres Spektrum zu betrachten. Man könnte sich statt erster Ordnung mit höherer Ordnung beschäftigen oder mit Systemen von Differentialgleichungen. Eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung wäre

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \quad (3.1)$$

Ein System von  $n$  gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung sieht wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung kann man umformen in System erster Ordnung.: Setze  $y = x_1$ ,  $y' = x_2$  bis  $y^{(n-1)} = x_n$ . Die Differentialgleichung in (3.1) ändert sich in

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ g(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Es ist also kein Verlust der Allgemeinheit, wenn wir uns auf Systeme erster Ordnung konzentrieren. Wir können soche Systeme schreiben als:

$$\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)).$$

Ein Anfangswertproblem für ein solches System ist dann

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t)), \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Wenn  $\vec{F}$   $n$  Komponenten hat, hat auch  $\vec{x}$   $n$  Komponenten und der Anfangswert  $\vec{x}_0$  ist durch  $n$  Werte festgelegt. Wir werden noch zeigen, dass ein solches Anfangswertproblem, mit  $\vec{F}$  eine genügend nette Funktion, für jedes  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  genau eine Lösung hat.

Wir nennen  $\vec{x} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (3.4), wenn  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ ,  $t \mapsto \vec{x}(t) \in C(a, b)$  und, mit Ausnahme von diskrete Stellen  $t_i$ , differenzierbar ist und  $\vec{x}'(t) = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$  erfüllt. Wenn  $y = x_1$  wie in (3.3) ist, bedeutet das, dass  $y \in C^{n-1}(a, b)$  gilt und dass  $y^{(n-1)}$  differenzierbar ist mit Ausnahme von diskreten Stellen.

## 3.2 Lineare Gleichungen und Systeme

Ein Operator  $L$  auf einem realen Vektorraum  $V$  nennt man linear, wenn

$$L(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Lv_1 + c_2Lv_2 \text{ für alle } v_i \in V \text{ und } c_i \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

**Definition 3.1** Eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t)$$

nennt man **linear**.

- Man sagt '**mit konstanten Koeffizienten**', wenn  $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$  für jede  $i = 1, \dots, n$  und  $t \in \mathbb{R}$ .
- Man nennt diese lineare Gleichung **homogen** oder **reduziert**, wenn  $f = 0$ .

**Definition 3.2** Ein System Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\vec{x}'(t) = A(t) \vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad (3.6)$$

mit  $A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^{n \times n}(\mathbb{R})$  (die  $n \times n$  Matrizen) und  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nennt man linear.

- Man sagt '**mit konstanten Koeffizienten**', wenn  $A(t) = A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ .
- Man nennt das System **homogen** oder **reduziert**, wenn  $f = 0$ .

Schreibt man das lineare System in (3.6) wie folgt,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - A(t) \right) \vec{x}(t) = \vec{f}(t), \quad (3.7)$$

dann sieht man den Zusammenhang mit linearen Operatoren.

Wenn es aus dem Kontext klar ist, dass man mit mehreren Komponenten zu tun hat, kann man das Vektorzeichen weglassen.

Aus der linearen Struktur folgt sofort das folgende Ergebnis.

**Lemma 3.3** Seien  $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto y(t)$  Lösungen von

$$x'(t) = A(t) x(t) + f(t) \text{ und } y'(t) = A(t) y(t) + g(t),$$

dann ist  $t \mapsto z(t) := c_1x(t) + c_2y(t)$  eine Lösung von

$$z'(t) = A(t) z(t) + c_1f(t) + c_2g(t).$$

**Beweis.** Man hat sofort:

$$\begin{aligned} z'(t) &= c_1 x'(t) + c_2 y'(t) = c_1 (A(t) x(t) + f(t)) + c_2 (A(t) y(t) + g(t)) = \\ &= A(t) (c_1 x(t) + c_2 y(t)) + c_1 f(t) + c_2 g(t) = A(t) z(t) + c_1 f(t) + c_2 g(t). \end{aligned}$$

■

### 3.3 Eindeutigkeit für lineare Systeme

**Lemma 3.4 (Eindeutigkeit)** Wenn  $A(t) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  beschränkt ist, hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = A(t) x(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  höchstens eine stückweise stetig differenzierbare Lösung.

**Bemerkung 3.4.1** Lösungen habe wir definiert als stetige Funktionen welche, mit Ausnahme von isolierten Stellen, differenzierbar sind und die Differentialgleichung erfüllen. Wenn  $f$  und  $A$  stückweise stetig<sup>1</sup> sind, dann folgt aus der Gleichung, dass auch  $x'$  stückweise stetig ist mit möglicher Ausnahme von isolierten Stellen. Genauer gesagt, wenn  $A$ ,  $f$  und  $x$  in einer Umgebung von  $t_0$  stetig sind, ist auch  $x'$  stetig in dieser Umgebung; wenn  $t_0$  so eine isolierte Ausnahmestelle ist, existieren immer noch die einseitigen Ableitungen: Durch den Mittelwertsatz gibt es  $\xi_h \in (t_0, t_0 + h)$  mit

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(\xi_h) = A(\xi_h) x(\xi_h) + f(\xi_h).$$

Weil  $\lim_{\xi \downarrow t_0} A(\xi)$  und  $\lim_{\xi \downarrow t_0} f(\xi)$  existieren, folgt

$$\begin{aligned} x'_r(t_0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} (A(\xi_h) x(\xi_h) + f(\xi_h)) = \\ &= \lim_{\xi \downarrow 0} (A(\xi) x(\xi) + f(\xi)) \end{aligned}$$

und  $\lim_{\xi \downarrow 0} (A(\xi) x(\xi) + f(\xi))$  existiert. Ähnlich existiert auch die linke Ableitung. Es folgt, dass  $x$  stückweise stetig differenzierbar ist.

**Beweis.** Seien  $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto y(t)$  zwei verschiedene Lösungen auf Existenzintervall  $[a, b] \ni 0$ . Dann ist  $s(t) := \|x(t) - y(t)\|^2$  eine zahlenwertige Funktion auf  $[a, b]$ . Außerdem gilt mit Ausnahme von isolierten Stellen:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 2(x(t) - y(t)) \cdot (x'(t) - y'(t)) = \\ &= 2(x(t) - y(t)) \cdot A(t)(x(t) - y(t)) \leq \\ &\leq M \|x(t) - y(t)\|^2 = M s(t). \end{aligned}$$

Weil  $A(t) \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  beschränkt ist, gibt es  $M \in \mathbb{R}^+$  mit  $\xi \cdot A(t)\xi \leq M \|\xi\|^2$  für alle  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Wir finden

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{-Mt} s(t)) = e^{-Mt} (s'(t) - M s(t)) \leq 0$$

<sup>1</sup>Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man stückweise stetig, wenn man  $[a, b]$  in endlich viele Teilintervalle aufteilen kann:

$$[a, b] = [a = a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_k, a_{k+1} = b]$$

und auf jedem dieser Teilintervalle  $[a_i, a_{i+1}]$  gibt es eine stetige Funktion  $g_i$  mit  $g_i = f$  auf  $(a_i, a_{i+1})$ .

und für  $b \geq t_2 > t_1 \geq a$  folgt

$$e^{-Mt_2}s(t_2) - e^{-Mt_1}s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-Mt}s(t)) dt \leq 0 \quad (3.8)$$

wenn zwischen  $t_1$  und  $t_2$  keine isolierte Problemstellen liegen. An solchen Problemstellen kommt man mit der Stetigkeit von  $s$  vorbei und es folgt, dass (3.8) sogar für alle  $t = t_2 > 0$  und  $t_1 = 0$  gilt:

$$e^{-Mt}s(t) = e^{-Mt}s(t) - e^{-M \cdot 0}s(0) \leq 0.$$

Weil  $s$  eine nicht-negative Funktion ist, folgt  $s(t) = 0$  für alle  $t \in [0, b]$ . Ein ähnliches Ergebnis kann man für  $t < 0$  ableiten. Es gilt also, dass  $\|x(t) - y(t)\| = 0$ , ein Widerspruch. ■

### 3.4 Formelle Lösungen linearer Systeme mit konstanten Koeffizienten

Das homogene Problem hat folgende Form:

$$\vec{x}'(t) = A \vec{x}(t) \quad (3.9)$$

wobei  $A$  diese Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (3.9) sieht sehr ähnlich aus wie

$$x'(t) = a x(t)$$

und lässt sich sogar ähnlich mit der Exponentialfunktion lösen.

Wir erinnern noch mal daran, dass die Exponentialfunktion als eine Potenzreihe definiert ist:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (3.10)$$

und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius  $\infty$  hat. Außerdem gilt innerhalb des Konvergenzradius, dass

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z^k}{k!} \right)'$$

Statt in (3.10)  $z \in \mathbb{C}$ , könnte man auch  $z \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  nehmen. Sogar komplexe Koeffizienten kann man zulassen.

**Definition 3.5** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Man definiert

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

**Bemerkung 3.5.1** Statt  $\exp(A)$  schreibt man auch  $e^A$ .

**Lemma 3.6** Für alle  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  konvergiert  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k$  in  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Oder anders gesagt:  $\exp(A)$  ist wohldefiniert.

**Beweis.** Wir müssen zeigen, dass jede Komponente  $\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k\right)_{i,j}$  konvergiert für  $\ell \rightarrow \infty$ . Setzen wir

$$m = \max \{|A_{ij}|; 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Dann gilt für den  $i, j$ -Eintrag von  $\frac{1}{k!} A^k$ , dass

$$\left| \left( \frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j} \right| \leq \left( \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} m & m & \cdots & m \\ m & m & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m \end{pmatrix}^k \right)_{i,j} = \frac{m^k n^{k-1}}{k!}.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k n^{k-1}}{k!}$$

konvergiert, nämlich nach  $\frac{1}{n} e^{mn}$ , ergibt das Majorantenkriterium, dass auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j}$$

konvergiert. ■

**Lemma 3.7** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

genau eine Lösung, nämlich die Funktion  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$x(t) = \exp(At) x_0.$$

**Beweis.** Durch Lemma 3.6 wissen wir, dass jede Komponente von  $\exp(At)$  Konvergenzradius  $\infty$  hat. Auch wissen wir, dass man innerhalb des Konvergenzradius die Folge von Summe und Ableitung ändern darf, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das heißt:

$$\begin{aligned} (\exp(At) x_0)' &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} x_0 = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell t^\ell x_0 = A \exp(At) x_0. \end{aligned}$$

Weil

$$(\exp(At) x_0)_{t=0} = e^O x_0 = I x_0 = x_0$$

gilt<sup>2</sup>, ist  $x(t) := e^{At}x_0$  eine Lösung von (3.11).

Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 3.4. ■

**Das allgemeine Problem** in (3.6), bei dem man auch eine rechte Seite  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  zulässt, wird

$$x'(t) = A x(t) + f(t).$$

Dieses System kann man (fast) genau so lösen wie eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

**Theorem 3.8** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion,  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

genau eine Lösung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nämlich

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.13)$$

**Bemerkung 3.8.1** Das Integral über einer Vektorfunktion ist definiert als Vektor von den Integralen der einzelnen Komponenten. Also für  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit integrierbaren Komponenten  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, n$

$$\int_a^b g(s)ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s)ds \\ \int_a^b g_2(s)ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s)ds \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite von (3.13) steht so ein Integral.

**Bemerkung 3.8.2** Das Definitionsgebiet  $[a, b]$  von  $f$  wird als Defintionsgebiet für  $x$  übernommen. Wenn  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig ist, dann findet man für die Differentialgleichung  $x'(t) = Ax(t) + f(t)$  die Lösungen  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$x(t) = e^{A(t-a)}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.14)$$

Dabei ist  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  beliebig zu wählen. Die Tatsache, dass das Definitionsgebiet übernommen wird, kann man so allgemein nur bei linearen Gleichungen annehmen.

---

<sup>2</sup>Hier ist  $I \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  die Identitätsmatrix und  $O \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  die Nullmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Beweis.** Der Anfangswert passt, denn

$$x(a) = e^{A0}x_0 + \int_a^a e^{A(t-s)}f(s)ds = Ix_0 = x_0.$$

Weiter schreibe man

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds = \\ &= e^{At}x_0 + \int_a^t e^{At}e^{-As}f(s)ds = e^{At} \left( x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) \end{aligned}$$

und differenziere:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{At} \left( x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) \right) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} e^{At} \right) \left( x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) + e^{At} \frac{\partial}{\partial t} \left( x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) = \\ &= Ae^{At} \left( x_0 + \int_a^t e^{-As}f(s)ds \right) + e^{At}e^{-At}f(t) = \\ &= Ax(t) + f(t). \end{aligned}$$

Man achte darauf, dass man bei den Multiplikationen die Folge nicht ohne weiteres umordnet: Es sind Matrizen. ■

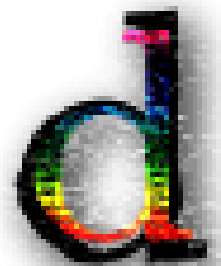




# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 4

# Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten



### 4.1 Einige Eigenschaften des Exponenten einer Matrix

Wir haben für  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  und  $t \in \mathbb{R}$  die Matrix  $\exp(tA)$  definiert:

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{1}{2}t^2 A^2 + \frac{1}{6}t^3 A^3 + \dots$$

Einige Eigenschaften sind die folgenden:

**Lemma 4.1** Seien  $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Es gilt

- $\exp(0A) = I$ .
- $\exp(tA) \exp(sA) = \exp((t+s)A)$  für alle  $s, t \in \mathbb{R}$ .
- $\frac{\partial}{\partial t} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA) A$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
- $AB = BA \Leftrightarrow \exp(tA) \exp(tB) = \exp(t(A+B))$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

### 4.2 Berechnung des Exponenten einer Matrix

**Beispiel 4.2** Wenn man Maple fragt, bekommt man ziemlich schnell, dass

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11+\sqrt{33}}{22} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11-\sqrt{33}}{22} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} & \frac{2\sqrt{33}}{33} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{2\sqrt{33}}{33} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} \\ \frac{\sqrt{33}}{11} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{\sqrt{33}}{11} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} & \frac{11-\sqrt{33}}{22} e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11+\sqrt{33}}{22} e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Direkt von Hand so ein Ergebnis zu berechnen ist keine besonders erfreuliche Sache. Man soll als (zukünftiger) Mathematiker aber wissen, wie man es berechnen kann, beziehungsweise wieso der Rechner das so einfach schafft.

Wir geben einige Ergebnisse, die man verwenden kann.

**Lemma 4.3** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  und  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Für eine Ähnlichkeitstransformation  $B, T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  mit  $T$  invertierbar gilt:

$$A = TBT^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = T \exp(tB) T^{-1}$$

2. Für eine Blockmatrix  $A$ , mit  $B \in M^{k \times k}(\mathbb{C})$  und  $C \in M^{(n-k) \times (n-k)}(\mathbb{C})$  gilt:

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}$$

3. Für eine Diagonalmatrix gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

4. Für einen Jordanblock gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

**Beweis.**

1. Man findet sofort

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tTBT^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tTBT^{-1})^k = \\ &= T \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k \right) T^{-1} = T \exp(tB) T^{-1}. \end{aligned}$$

2. Auch hier

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k B^k & O \\ O & t^k C^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Das Ergebnis folgt als wiederholte Anwendung von 2.

4. Wir schreiben

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und finden so  $A = \lambda I + E$ . Weil  $\lambda I E = \lambda E = E \lambda I$ , das heißt,  $\lambda I$  und  $E$  kommutieren, folgt mit Lemma 4.1, dass

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda I + tE) = \exp(t\lambda I) \exp(tE) = e^{t\lambda} \exp(tE). \quad (4.2)$$

Weil  $E$  nilpotent ist (die Linie mit 1 schiebt sich jedesmal nach rechts in  $E^2$ ,  $E^3$  usw.) und  $E^n = O$ , gilt

$$\begin{aligned} \exp(tE) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tE)^k = I + tE + \frac{t^2}{2} E^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} E^{n-1} + O = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und kombiniert man mit (4.2), folgt so das gewünschte Ergebnis.  $\blacksquare$

Ohne Beweis werden wir ein Ergebnis aus der Linearen Algebra verwenden, nämlich dass jede Matrix einer Jordan-Matrix ähnlich ist. Eine Jordan-Matrix ist wie folgt definiert:

**Definition 4.4** Eine Matrix  $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  ist eine **Jordan-Matrix**, wenn sie wie folgt aus Blöcken zusammengesetzt ist:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \cdots & \cdots & O \\ O & B_2 & O & & & \vdots \\ O & O & B_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & B_{k-1} & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Jede Matrix ist ähnlich einer Jordan-Matrix heißt:

**Theorem 4.5 (Marie Ennemond Camille Jordan)** Für jede  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  gibt es eine invertierbare Matrix  $T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  und eine Jordan-Matrix  $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  derart, dass

$$A = T J T^{-1}.$$

Einen Beweis sollte man in der Vorlesung Linearen Algebra bekommen. Die Skalaren  $\lambda_i$ , die in  $J$  erscheinen, sind die Eigenwerte von  $A$ .

- Die algebraische Vielfachheit von  $\lambda_i$ , das heißt die Vielfachheit von  $\lambda_i$  als Nullstelle vom Polynom  $\det(A - \lambda I)$ , liest man ab in  $J$  als die Anzahl der  $\lambda_i$  auf der Diagonalen von  $J$ .
- Die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$  ist die Dimension vom Eigenraum

$$\dim \{ \phi \in \mathbb{C}^n; A\phi = \lambda_i \phi \},$$

diese findet man wieder als die Anzahl der Jordan-Blöcke  $B_j$  mit  $\lambda_i$  auf der Diagonalen.

- Wenn die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$  echt kleiner ist als die algebraische, dann gibt es mindestens einen generalisierten Eigenvektor der ersten Ordnung:

- $\phi \in \mathbb{C}^n$  ist ein generalisierter Eigenvektor der  $k$ -ten Ordnung für  $A$  beim Eigenwert  $\lambda_i$ , wenn

$$(A - \lambda_i I)^{k+1} \phi = 0 \text{ und } (A - \lambda_i I)^k \phi \neq 0.$$

- wenn  $\phi \in \mathbb{C}^n$  ein generalisierter Eigenvektor der  $k$ -ten Ordnung beim Eigenwert  $\lambda_i$  ist, dann ist  $(A - \lambda_i I) \phi$  ein generalisierter Eigenvektor der  $(k-1)$ -ten Ordnung beim Eigenwert  $\lambda_i$ . Eigenvektoren soll man auffassen als generalisierter Eigenvektor der 0-ten Ordnung.

- Jede Matrix hat eine Basis aus Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren.

Wenn man eine Zerlegung der Form  $A = T J T^{-1}$  gefunden hat, dann kann man mit Hilfe von Lemma 4.3  $\exp(tA) = T \exp(tJ) T^{-1}$  berechnen.

**Beispiel 4.6** Für die Matrix, die wir vorhin benutzt haben, hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-11}{22} & -\frac{2\sqrt{33}}{33} \\ \frac{11-\sqrt{33}}{22} & \frac{2\sqrt{33}}{33} \end{pmatrix}$$

und es folgt das Ergebnis von vorhin.

**Beispiel 4.7** Für  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  findet man durch  $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ , das heißt

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1 - i$  und  $\lambda_2 = 1 + i$ . Zwei dazugehörige Eigenvektoren sind:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

und

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 4.8** Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

hat als Lösung  $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t + 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t + 2e^t \cos t \end{pmatrix}$ .

**Beispiel 4.9** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix findet man aus

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0,$$

nämlich  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 5$ . Dazugehörige Eigenvektoren sind  $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Man kann den formellen Weg gehen:

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Man kann sich auch überlegen, dass  $x(0) = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$  und deshalb

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + \frac{2}{3}e^{\lambda_2 t} \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 4.10** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

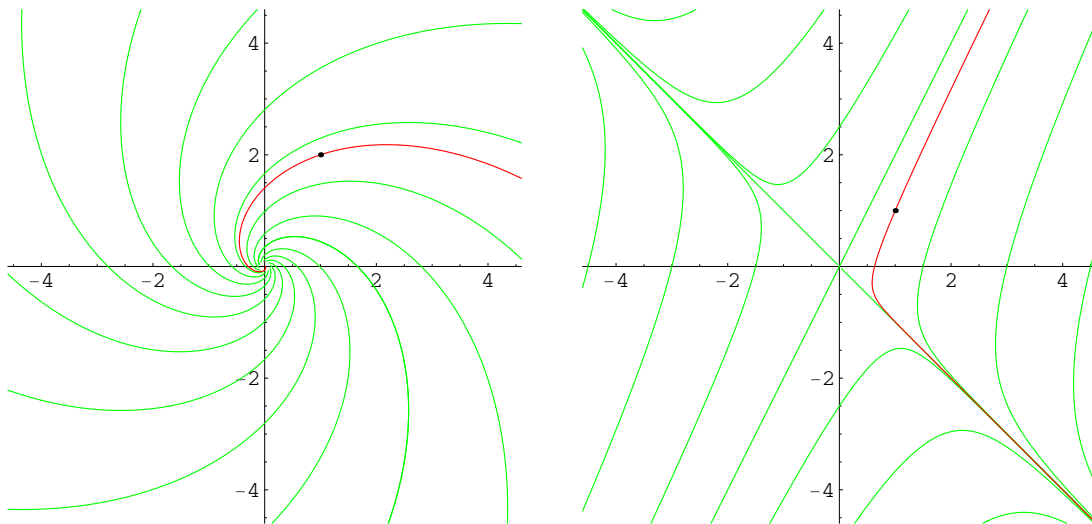


Abbildung 4.1: Links in rot die Spur der Lösung vom Beispiel 4.8. Rechts die Spur der Lösung vom Beispiel 4.9. Einige andere Lösungen zu diesen beiden Differentialgleichungen, also mit anderen Anfangswerten, sind in grün dargestellt. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spuren durchlaufen werden.

Die Eigenwerte der Matrix sind  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2i$  und  $\lambda_3 = -1 + 2i$  und dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann den Exponenten berechnen oder direkt den Anfangswert auf eine Basis von Eigenvektoren zerlegen und bekommt schlußendlich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{10}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{20}e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{20}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Eine Abbildung der Spur findet man in Abbildung 4.2.

### 4.3 Lineare Stabilität

Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Wir betrachten wiederum ein homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = Ax(t). \quad (4.3)$$

**Definition 4.11** Das homogene lineare System in (4.3) heißt

- **stabil**, wenn für jede Lösung  $x$  gilt, es gibt  $M \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\|x(t)\| \leq M \text{ für alle } t \geq 0;$$

- **instabil**, wenn es eine Lösung  $x$  gibt derart, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty;$$

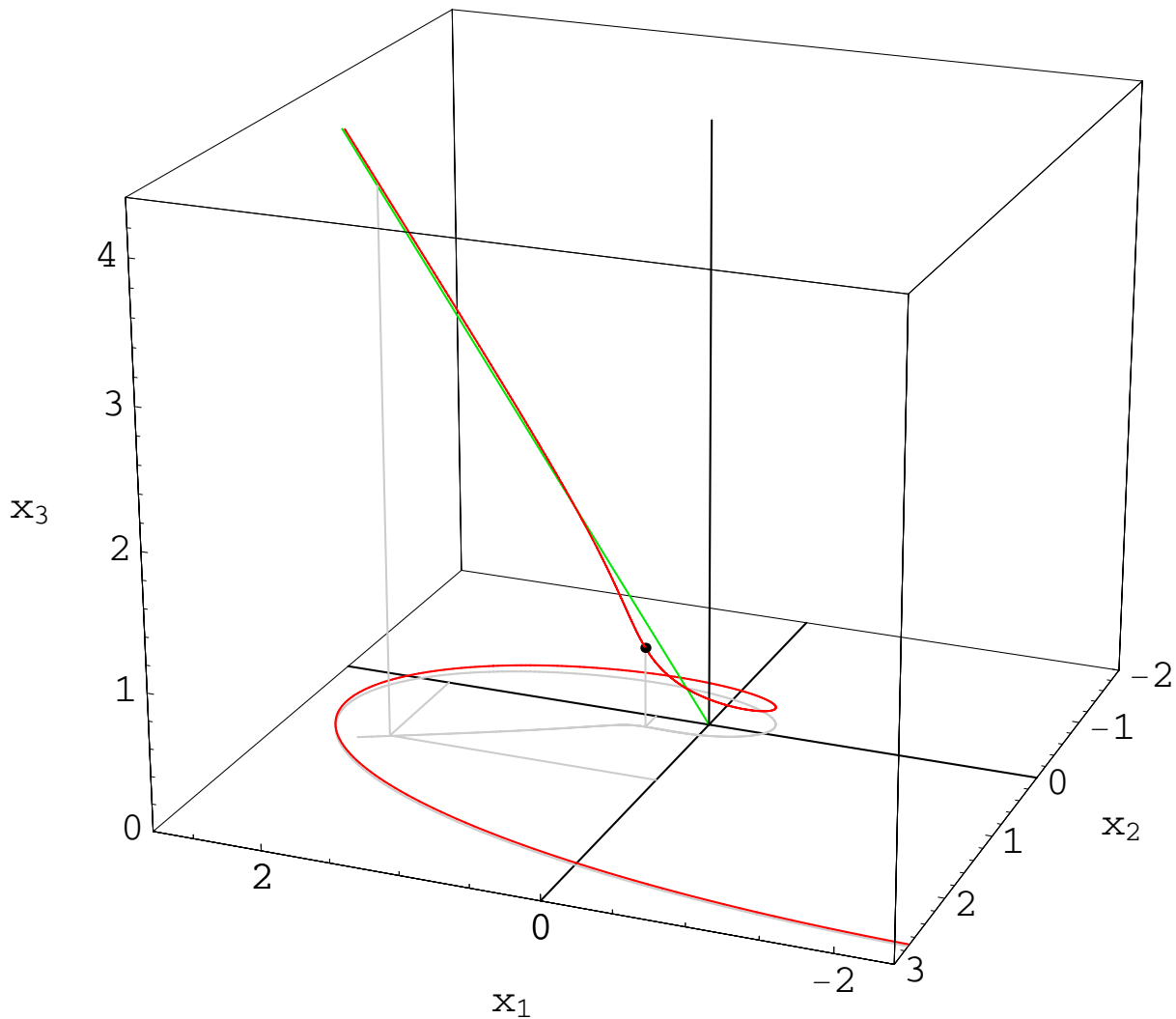


Abbildung 4.2: Die Spur der Lösung vom Beispiel 4.10. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spur durchlaufen wird. Und was bedeutet die grüne Linie, welche aus  $(0, 0, 0)$  nach oben führt?

- **asymptotisch stabil**, wenn für alle Lösungen  $x$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

- **neutral stabil**, wenn das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

**Bemerkung 4.11.1** Diese Klassifizierung gilt nur für lineare Systeme. Bei homogenen linearen Systemen ist 0 immer eine Gleichgewichtstelle (= konstante Lösung). Bei Gleichgewichtstellen für nichtlineare Differentialgleichungen werden diese globalen Bedingungen ersetzt durch lokale Bedingungen für eine Umgebung der Gleichgewichtstelle.

In dem letzten Paragraph haben wir gesehen, dass das globale Verhalten bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eigentlich nur von den Eigenwerten abhängt. Wir bekommen dann auch das folgende Ergebnis.

**Lemma 4.12** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und sei  $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$  die Menge der unterschiedlichen Eigenwerte für  $A$ . Nennen wir  $m_i$  die geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ .

1. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, dann ist (4.3) asymptotisch stabil.
2. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt, dann ist (4.3) instabil.
3. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und die algebraische Vielfachheit für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$  gleich  $m_j$  ist, dann ist (4.3) stabil.
4. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, k\}$  gilt und es außerdem ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  gibt mit  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ , wo die algebraische Vielfachheit nicht  $m_j$  gleicht, dann ist (4.3) instabil.

**Beweis.** Die Lösungstermen die erscheinen, sind  $t^{m-1}e^{\lambda_i t}$  mit  $m \leq m_i$ .

1. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m-1}e^{\lambda_i t} = 0$ .
2. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \infty$ .
3. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ , dann gilt  $|e^{\lambda_i t}| = 1$  und wenn die algebraische Vielfachheit  $m_i$  für solche  $\lambda_i$  gleicht, dann kommt  $t^k e^{\lambda_i t}$  mit  $k > 0$  nicht vor.
4. Wenn  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$  und die algebraische Vielfachheit nicht  $m_i$  gleicht für ein solchen  $\lambda_i$ , dann gibt es  $te^{\lambda_i t}$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} |te^{\lambda_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$ .

■

**Bemerkung 4.12.1** Wenn also gefragt wird, ob alle Lösungen von  $x'(t) = Ax(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nach 0 konvergieren, braucht man nur die Eigenwerte und gegebenenfalls die Vielfachheiten zu berechnen.

**Beispiel 4.13** Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ist asymptotisch stabil, denn  $\lambda_1 = -1 - 3i$  und  $\lambda_2 = -1 + 3i$  und  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .

**Beispiel 4.14** Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} x(t)$$

ist instabil, denn es gibt einen Eigenwert<sup>1</sup>  $\lambda \approx 4.45087$  und  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .

<sup>1</sup>Dieser Eigenwert ist numerisch approximiert. Statt numerisch vorzugehen, kann man auch das Polynom  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  näher untersuchen. Die Eigenwerte von  $A$  sind die Nullstellen von  $p$  und für diese Matrix  $A$  gilt

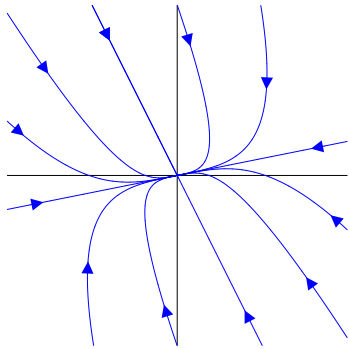
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \dots = \lambda^4 + 10\lambda^3 - 200\lambda - 384.$$

Weil  $p(100) > 0$  und  $p(0) = -384 < 0$ , sagt der Zwischenwertsatz, dass  $p(\lambda)$  eine positive Nullstelle besitzt.

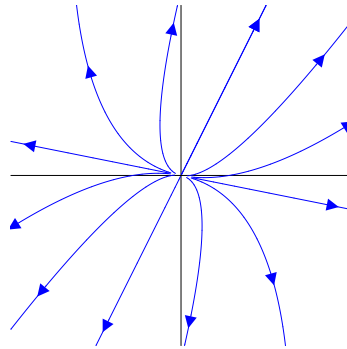


### 4.3.1 Klassifizierung in zwei Dimensionen

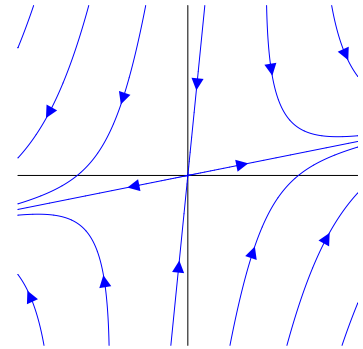
In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten ziemlich übersichtlich. So übersichtlich, dass man sogar individuelle Namen für die auftretenden Fälle<sup>2</sup> hat.



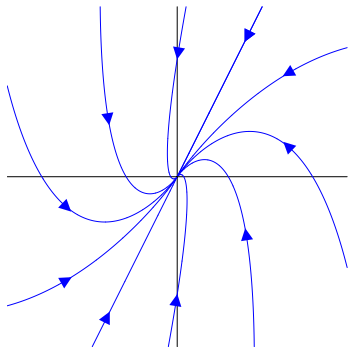
stabiler Knoten  
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$   
 Basis von Eigenvektoren



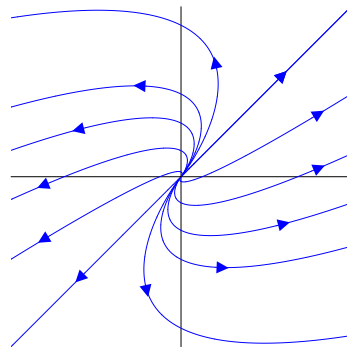
instabiler Knoten  
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$   
 Basis von Eigenvektoren



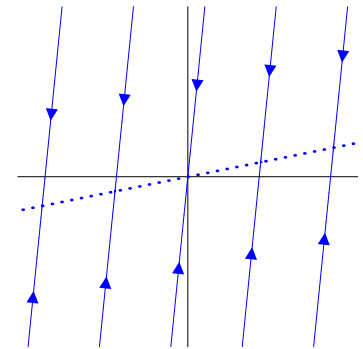
Sattelpunkt  
 $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$



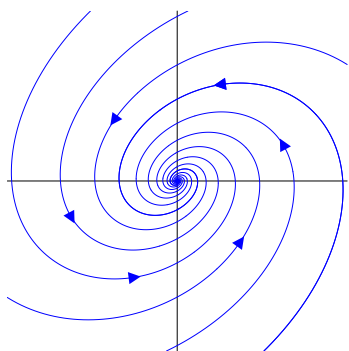
entarteter stabiler Knoten  
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$   
 eindimensionaler Eigenraum



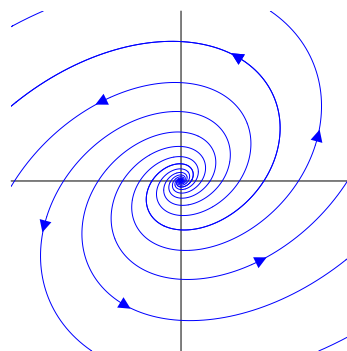
entarteter instabiler Knoten  
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$   
 eindimensionaler Eigenraum



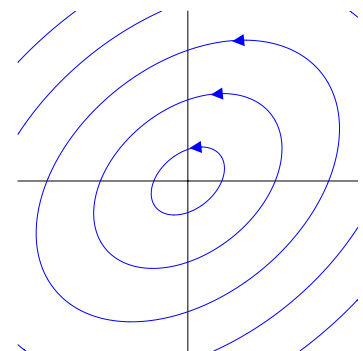
neutral stabiler Knoten  
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



stabiler Strudel  
 $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



instabiler Strudel  
 $\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



Zentrum  
 $\operatorname{Re} \lambda_i = 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$

<sup>2</sup>Für diese Bilder sind folgende Matrizen verwendet worden:

$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 49 & 98 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 49 & 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -75 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -25 \\ 35 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -29 \\ 5 & 25 \end{pmatrix},$

### 4.3.2 Geometrische Zusammenhänge

Das Gleichungssystem

$$x'(t) = A x(t) \quad (4.4)$$

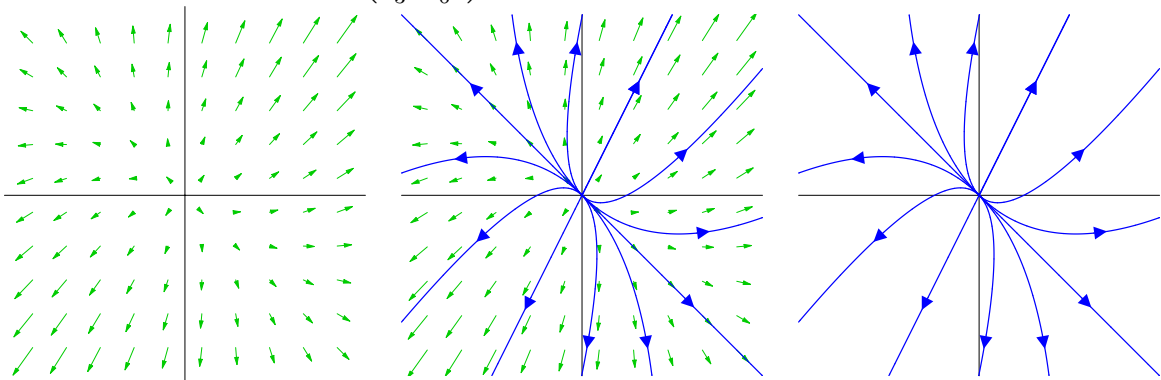
mit  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  gibt eine Beziehung zwischen Position und Richtung einer Lösungskurve. Für  $n = 2$  gilt:

Eine Lösung von (4.4) hat an der Stelle  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  die Richtung  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Das erlaubt es uns Lösungen zu skizzieren, ohne das System explizit zu lösen, indem wir den Vektoren im Vektorfeld  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  'folgen'.

Formal gesprochen ist ein zweidimensionales Vektorfeld eine Abbildung von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ . Es lässt sich darstellen, indem man mehrere Punkte in der Ebene nimmt und in jedem Punkt einen Pfeil einzeichnet mit der durch das Vektorfeld angegebenen Größe und Richtung. Man denke an die Wettervorhersage für den Wind.

**Beispiel 4.15** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



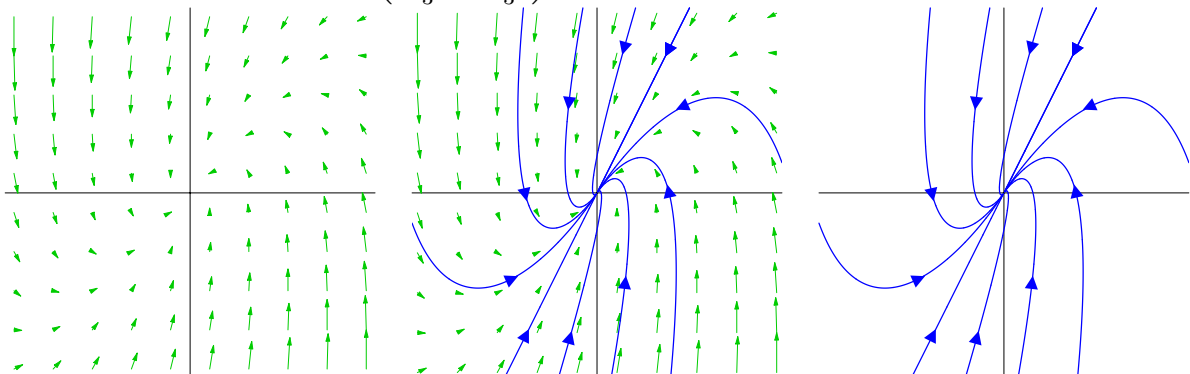
Die Eigenwerte sind 1 und  $\frac{1}{2}$  und mit den zugehörigen Eigenvektoren findet man die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Nach Anfangswert  $x(0)$  gelöst wird die Lösung:

$$x(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} x(0).$$

**Beispiel 4.16** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



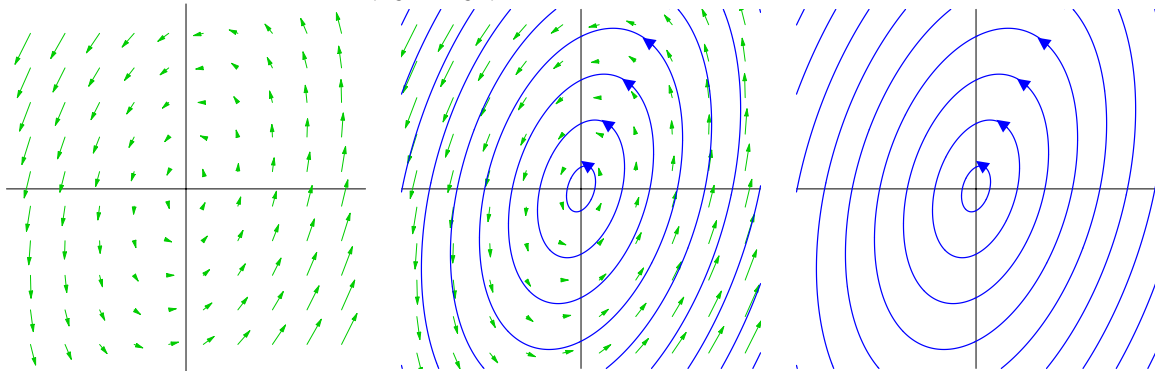
Es gibt hier nur einen Eigenwert:  $\lambda = -1$ . Verwendet man den Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und einen generalisierten Eigenvektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ , wird die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Anfangswert  $x(0)$  gelöst wird die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \\ \frac{4}{3}te^{-t} & -\frac{4}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \end{pmatrix} x(0). \end{aligned}$$

**Beispiel 4.17** Für  $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$  hat man:



Die Lösungen des Systems sind:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{3} \sin t & -\frac{2}{3} \sin t \\ \frac{5}{3} \sin t & \cos t - \frac{1}{3} \sin t \end{pmatrix} x(0).$$

Auch hier kann man die Lösungen mit Eigenvektoren schreiben aber die sind dann in komplexer Form:

$$x(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c_i \in \mathbb{C}.$$

So eine Lösung ist reell genau dann, wenn  $c_1 = \bar{c}_2$ . Setzt man  $c_1 = a + ib$  und  $c_2 = a - ib$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , findet man die reellen Lösungen und es erscheinen Termen mit  $\cos t$  und  $\sin t$ . Man erinnere sich, dass  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ .

**Bemerkung 4.17.1** In diesen Bildern erkennt man auch die lineare Eigenschaft dieser Systeme. Wenn  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung ist, dann ist für jedes  $c \in \mathbb{R}$  auch  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\tilde{x}(t) = cx(t)$  eine Lösung. Für das zugehörige Vektorfeld bedeutet das, dass die Vektoren die auf einer geraden Linie durch den Ursprung liegen, parallel sind. Genauer gesagt: an der gleichen Seite zeigen sie in die gleiche Richtung; gegenüber liegend in die entgegengesetzte Richtung.

## 4.4 Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man auch auf diese Art angehen. Sei  $f \in C(\mathbb{R})$  und betrachte

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t). \quad (4.5)$$

Dann setzt man  $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$  für  $i = 1, \dots, n$  und findet

$$y'(t) = Ay(t) + g(t) \quad (4.6)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  gilt  $\det(A - \lambda I) = 0$  und das wird jetzt bei der Entwicklung der Determinante nach der letzte Zeile zu

$$(a_1 - \lambda) \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

anders gesagt:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (4.8)$$

**Definition 4.18** Man nennt (4.8) die charakteristische Gleichung für (4.5).

**Lemma 4.19** Sei  $a_i \in \mathbb{C}$  und sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  wie in (4.7). Jeder Eigenwert von  $A$  hat geometrische Vielfachheit gleich 1.

**Beweis.** Wenn  $\lambda$  ein Eigenwert ist, dann gilt für dazugehörige Eigenvektoren  $\varphi$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$\varphi_n = \lambda \varphi_{n-1} = \lambda^2 \varphi_{n-2} = \cdots = \lambda^{n-1} \varphi_1,$$

also höchstens ein unabhängiger Eigenvektor. ■

**Theorem 4.20** Sei  $a_i \in \mathbb{C}$  und sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  wie in (4.7). Nehme an,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  sind die Eigenwerte von  $A$  mit algebraischen Vielfachheiten  $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ .

- Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) \quad (4.9)$$

wie folgt:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.10)$$

- Kennt man eine Lösung  $\tilde{x}$  von (4.5), dann ist die allgemeine Lösung von (4.5) wie folgt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.11)$$

**Bemerkung 4.20.1** Um es nochmals in Worten zu sagen: diese Aussagen bedeuten, dass man jede Lösung  $x$  schreiben kann, wie es auf der rechten Seite steht und umgekehrt; jede Funktion, die man schreiben kann wie so eine rechte Seite, ist eine Lösung.

**Bemerkung 4.20.2**  $F = \{t^m e^{\lambda_i t}; 1 \leq i \leq k \text{ und } 0 \leq m \leq m_i - 1\}$  ist ein Fundamentalsystem für (4.9).  $F$  heißt ein Fundamentalsystem, wenn es eine Basis für den Lösungsraum ist.

**Bemerkung 4.20.3** Die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleicht  $n$ . Die Anzahl der Konstanten in (4.10) gleicht auch der Summe der algebraischen Vielfachheiten. Weil die Funktionen  $t^m e^{\lambda_i t}$  (linear) unabhängig sind, bilden die Funktionen in (4.10) einen  $n$ -dimensionalen Lösungsraum.

Geht man zurück zum System (4.6) mit  $A$  und  $g$  wie in (4.7), dann findet man für jeden Anfangswert  $y_0$  genau eine Lösung. Die Übersetzung für (4.5) lautet: für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  hat man genau eine Lösung  $x$  vom folgenden Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t) \\ x(0) = y_0, \quad x'(0) = y_1, \quad x''(0) = y_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = y_n. \end{cases}$$

**Beweis.** Die Lösungen  $y$  vom System (4.6) mit  $A$  und  $g$  wie in (4.7) folgen aus Satz 3.8. Nach Lemma 4.3 enthalten die expliziten Lösungen der homogenen Gleichung nur Termen  $c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}$  mit  $m \leq m_i - 1$ . Das heißt, jede Lösung der homogenen Gleichung kann man schreiben wie auf der rechten Seite von (4.10). Weil man eindeutig hin- und herwechseln kann zwischen der Gleichung  $n$ -ter Ordnung für  $y$  und dem System erster Ordnung für  $x$ , muss auch die Lösung für  $x$  in (4.9)  $n$ -dimensional sein. Weil die rechte Seite von (4.10) genau  $n$  frei zu wählende Konstanten hat, ist jede Funktion auf dieser rechten Seite eine Lösung.

Die Behauptung für die inhomogene Gleichung folgt mit der Bemerkung, dass wenn  $\tilde{x}$  und  $\hat{x}$  die Gleichung (4.5) erfüllen, die Funktion  $x = \tilde{x} - \hat{x}$  eine Lösung von (4.9) ist. ■

**Beispiel 4.21** Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^{2t} + t^3. \quad (4.12)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung ist  $x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = 0$  und die Eigenwerte findet man durch

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Also  $\lambda = 1$  und  $\lambda = -1$  sind die Eigenwerte und beide haben algebraische Vielfachheit 2 (und geometrische Vielfachheit 1). Das liefert

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Eine spezielle Lösung für (4.12) findet man durch  $x = y_1$  mit

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} (t-s) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + e^{2s} \end{pmatrix} ds.$$

Die explizite Berechnung ist ohne C.A.S.<sup>3</sup> sehr intensiv. Man kann auch versuchen zu raten! Wenn man  $\tilde{x}_a(t) = e^{2t}$  versucht, findet man  $\tilde{x}_a''''(t) - 2\tilde{x}_a''(t) + \tilde{x}_a(t) = (16 - 8 + 1)e^{2t}$  und das passt nicht. Die Funktion  $x_a(t) = \frac{1}{9}e^{2t}$  geht schon besser:

$$x_a''''(t) - 2x_a''(t) + x_a(t) = e^{2t}$$

Mit ein paar Polynomversuchen findet man für  $x_b(t) = t^3 + 12t$ , dass  $x_b''''(t) - 2x_b''(t) + x_b(t) = t^3$ . Die schöne Linearitätseigenschaft liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{hom}}(t) + x_a(t) + x_b(t) = \\ &= x_a(t) + x_b(t) + c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

als allgemeine Lösung für (4.12).

**Beispiel 4.22** Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^t. \quad (4.13)$$

Alles verläuft fast so wie vorher. Bloss für eine spezielle Lösung der Form  $ce^t$  besteht keine Hoffnung, weil  $e^t$  schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Sogar  $te^t$  liefert 0 an der rechten Seite. Man hat dann aber Erfolg beim Versuch mit  $ct^2e^t$ :

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = c(t^2 + 8t + 12)e^t - 2c(t^2 + 4t + 2)e^t + ct^2e^t = 9ce^t.$$

Man nehme  $c = \frac{1}{9}$ . Die allgemeine Lösung ist  $x(t) = \frac{1}{9}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t}$  mit  $c_i \in \mathbb{R}$ .

**Algorithmus 4.23** [Raten statt Rechnen bei linearen Dgl.] Für eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t).$$

bei besonderen  $f$ .

Wenn  $f$  keine Lösung der homogenen Gleichung ist:

Sei $f = \dots$ , dann versuche man für $x = \dots$	
$t^m$	$\sum_{k=1}^m c_k t^k$
$e^{\gamma t}$	$ce^{\gamma t}$
$\sin(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$\cos(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$t^m e^{\gamma t}$	$\sum_{k=1}^m c_k t^k e^{\gamma t}$
$\vdots$	$\vdots$

<sup>3</sup>C.A.S. = Computer Algebra System. Gemeint ist Software wie Maple oder Mathematica, wo alle rechnerische Tricks programmiert sind, um zum Beispiel eine Stammfunktion zu finden.

Wenn  $f$  eine Lösung der homogenen Gleichung ist, versuche man  $t^{m_1}\tilde{x}(t)$ , bei dem man jetzt  $\tilde{x}$  aus der rechten Seite der Tabelle nimmt und  $m_1 \in \mathbb{N}^+$  geschickt wählt.

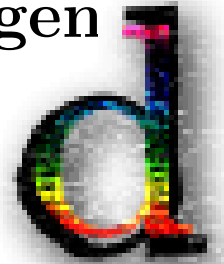




# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 5

### Approximationen



## 5.1 Approximation einer Lösung

Wir werden in diesem Kapitel einige Möglichkeiten vorstellen, wie man eine Lösung einer Differentialgleichung approximieren kann. Um es nicht unnötig kompliziert zu machen, werden wir eine Gleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

betrachten und nicht gleich ein System von Gleichungen erster Ordnung. Wenn man genau hinschaut, sollte man bemerken, dass dieser allgemeinere Fall genau so läuft.

Approximationen sind nicht nur nützlich um eine Lösung zu approximieren. Wenn man eine Folge von Approximationen  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  hat, die auf irgendeine passende Art eine Cauchy-Folge von Funktionen bilden, kann man hoffen, dass diese Cauchy-Folge sogar konvergiert. Wenn  $y_n \rightarrow y_\infty$  auf irgendeine Art, dann hätte man mit der Funktion  $y_\infty$  einen guten Kandidaten für eine Lösung. Genau diesen Vorgang werden wir detailliert darstellen, um die Existenz einer Lösung nachzuweisen.

### 5.1.1 Numerische Methoden zur Approximation

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

und geben einige numerische Möglichkeiten um die Lösung einer Differentialgleichung zu approximieren. Angenommen wird, dass  $f$  und  $y_0$  gegeben sind. Die Funktion  $x \mapsto y(x)$  wird gesucht.

**Algorithmus 5.1** [Eulersches Polygonzugverfahren in Vorwärtsrichtung]

Man nehme  $h > 0$  eine kleine Zahl und setze  $x_n = x_0 + nh$ . Man definiere iterativ:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

**Bemerkung 5.1.1** *Hier steht nichts anderes als*

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n).$$

*Der Ausdruck an der linken Seite ist eine Approximation der Ableitung.*

**Algorithmus 5.2** [Eulersches Polygonzugverfahren in Rückwärtsrichtung]

Man nehme  $h > 0$  eine kleine Zahl und setze  $x_n = x_0 + nh$ . Man löse  $y_{n+1}$  iterativ aus der Gleichung:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

In beiden Fällen definiert man die approximative Lösung  $\tilde{y}$  in zwischenliegende Stellen durch lineare Interpolation:

$$\tilde{y}(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} y_{n+1} + \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} y_n \quad \text{für } x \in (x_n, x_{n+1}).$$

Daher auch der Name „Polygonzugverfahren“.

**Bemerkung 5.2.1** *Das vorwärts gerichtete Verfahren ist einfacher, da es explizit ist. Für die Rückwärtsrichtung muss man in jedem Schritt  $y_{n+1}$  implizit lösen. Leider ist die Vorwärtsrichtung instabiler.*

**Bemerkung 5.2.2** *Cauchy hat wesentlich zum mathematischen Verständnis dieses Polygonzugverfahrens beigetragen und darum wird dieses Verfahren oft auch Euler-Cauchy-Verfahren genannt.*

**Bemerkung 5.2.3** *Beide Eulersche Polygonzugverfahren sind Einschrittverfahren. Das erste ist ein explizites, das zweite ein implizites Verfahren. Man kann sich selber davon überzeugen, dass*

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{1}{2} f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

oder

$$y_{n+1} = y_n + h f \left( \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right)$$

*eine Lösung besser approximieren könnte. Beide Vorschläge wären implizit. Statt dessen kann man auch Mehrschrittverfahren anwenden. Zum Beispiel das Zweischritt-Adams-Bashforth-Verfahren:*

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{3}{2} f(x_n, y_n) - \frac{1}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \right).$$

*Ein Verfahren, das bekannt ist für seine gute Konvergenz, ist das vierstufige Runge-Kutta-Verfahren:*

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= y_n + h f(x_n, y_n), \\ y_{n+1}^{(2)} &= y_n + h f \left( \frac{1}{2} (x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2} (y_n + y_{n+1}^{(1)}) \right), \\ y_{n+1}^{(3)} &= y_n + h f \left( \frac{1}{2} (x_n + x_{n+1}), \frac{1}{2} (y_n + y_{n+1}^{(2)}) \right), \\ y_{n+1}^{(4)} &= y_n + h f \left( x_{n+1}, y_{n+1}^{(3)} \right), \\ y_{n+1} &= \frac{1}{6} y_{n+1}^{(1)} + \frac{1}{3} y_{n+1}^{(2)} + \frac{1}{3} y_{n+1}^{(3)} + \frac{1}{6} y_{n+1}^{(4)}. \end{aligned}$$

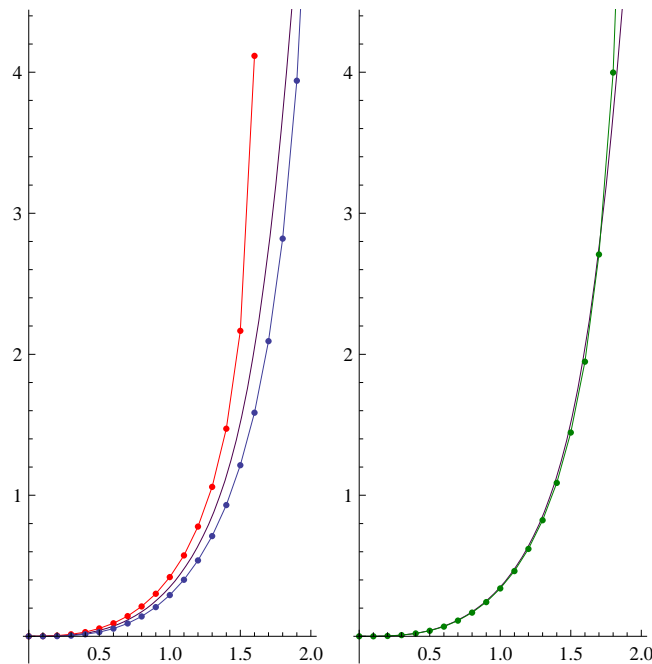


Abbildung 5.1: Links Approximationen mit beiden Eulerschen Verfahren für Beispiel 5.3; rechts Runga-Kutta. In beiden Fällen:  $h = 0.1$ . Die Punkte stellen die diskrete Approximationen dar. Der Polygonzug entsteht wenn man sie verbindet.

**Bemerkung 5.2.4** Wie schnell ein solches Verfahren zu einer echten Lösung konvergiert, hängt ab von der Regularität der rechten Seite  $f$  und von der Größe ihrer Ableitungen. Grob gesagt macht Euler-Vorwärts in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung  $h^2$ . Weil man in einem festen Intervall  $1/h$  Schritte braucht, bekommt man bei diesem Verfahren einen Fehler von Ordnung  $h$ . Runga-Kutta macht für genügend glatte  $f$  in jedem Schritt einen Fehler der Größenordnung  $h^5$ . Auf einem festen Intervall hat der Fehler Größenordnung  $h^4$ .

**Beispiel 5.3** Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem<sup>1</sup>:

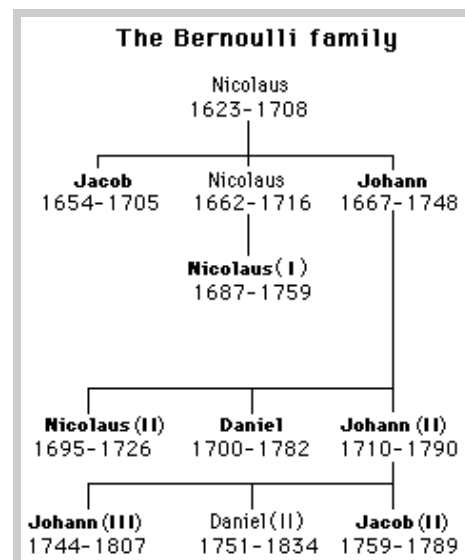
$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

<sup>1</sup>Die Differentialgleichung  $y'(x) = x^2 + y(x)^2$  ist einer der einfachsten, die man nicht mit elementaren Standardfunktionen lösen kann. Jacob Bernoulli (1654–1705) hat sich schon mit dieser Gleichung beschäftigt.

Es gibt übrigens 8 Bernoullis in der Mathematik. Dieser Jacob, auch Jacob I genannt, ist der bekannteste und ist derjenige nach dem die Differentialgleichung benannt worden ist. Mehr dazu finden Sie in

The MacTutor History of Mathematics archive,  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>

wo auch das Bild des Stammbaums rechts entnommen worden ist. Euler (1707-1783) hat studiert bei Johann Bernoulli und war befreundet mit Daniel Bernoulli.



Wenn wir  $h = .2$  nehmen und die beiden Eulerschen Verfahren als auch das Runge-Kutta Verfahren verwenden, bekommen wir die Bilder in Abbildung 5.1. Obwohl diese Differentialgleichung nicht zu den Standardtypen gehört, gibt es eine explizite Lösung mit Hilfe der Bessel-Funktionen. Auch diese Lösung ist eingezeichnet:

$$y(x) = \frac{x \left( J_{\frac{3}{4}} \left( \frac{1}{2}x^2 \right) - J_{-\frac{5}{4}} \left( \frac{1}{2}x^2 \right) \right)}{2J_{-\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{2}x^2 \right)} - \frac{1}{2x}.$$

$J_\nu$  ist die Bessel-Funktion<sup>2</sup> der ersten Sorte mit Index  $\nu$ . Die Funktion  $y$  hat ein Asymptot bei  $x \approx 2.00315$ .

## 5.1.2 Analytische Methoden zur Approximation

### Potenzreihen

Wenn die Funktion  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  in dem Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

darstellbar ist als eine konvergente Potenzreihe:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (x - x_0)^k (y - y_0)^n$$

dann kann man auch die Lösung als eine Potenzreihe darstellen:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k (x - x_0)^k. \quad (5.1)$$

Diese Methode wurde von Euler in seinem Lehrbuch aus 1768 schon vorgestellt. Cauchy war derjenige, der bemerkte, dass nicht alle Funktionen als Reihe darstellbar sind. Der erste Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen wird Cauchy zugeschrieben. Er zeigte, dass die Eulerschen Polygonzüge für  $h \downarrow 0$  zu einer Lösung des Anfangswertproblems konvergieren. Übrigens hat er auch mit diesem Reihenansatz lokaler Existenz für Anfangswertprobleme mit obigen Bedingungen beweisen können.

**Beispiel 5.4** Wir betrachten wiederum das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

<sup>2</sup> $J_\nu$  ist die Bessel-Funktion der ersten Art von Index  $\nu$ . Sie ist definiert für  $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$  durch

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

$\Gamma: \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Gamma-Funktion. Sie ist definiert für  $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$  durch

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \text{ falls } s > 0,$$

und weiter iterativ durch  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  für  $s \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ . Es gilt  $\Gamma(k+1) = k!$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

Wenn wir eine Lösung der Form (5.1) haben mit  $x_0 = 0$ , dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) y_{k+1} x^k = x^2 + \left( \sum_{k=1}^{\infty} y_k x^k \right)^2 = x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{k-1} y_i y_{k-i} \right) x^k.$$

Es folgt

$$\begin{array}{ll} y_1 = 0 & \Rightarrow y_1 = 0 \\ 2y_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = 0 \\ 3y_3 = 1 + y_1^2 & \Rightarrow y_3 = \frac{1}{3} \\ 4y_4 = 2y_1y_2 & \Rightarrow y_4 = 0 \\ 5y_5 = 2y_1y_3 + y_2^2 & \Rightarrow y_5 = 0 \\ 6y_6 = 2y_1y_4 + 2y_2y_3 & \Rightarrow y_6 = 0 \\ 7y_7 = 2y_1y_5 + 2y_2y_4 + y_3^2 & \Rightarrow y_7 = \frac{1}{3^2 \cdot 7} \\ 8y_8 = 2y_1y_6 + 2y_2y_5 + 2y_3y_4 & \Rightarrow y_8 = 0 \\ 9y_9 = 2y_1y_7 + 2y_2y_6 + 2y_3y_5 + y_4^2 & \Rightarrow y_9 = 0 \\ 10y_{10} = 2y_1y_8 + 2y_2y_7 + 2y_3y_6 + 2y_4y_5 & \Rightarrow y_{10} = 0 \\ 11y_{11} = 2y_1y_9 + 2y_2y_8 + 2y_3y_7 + 2y_4y_6 + y_5^2 & \Rightarrow y_{11} = \frac{2}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Man findet

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{13}{218295}x^{15} + \dots$$

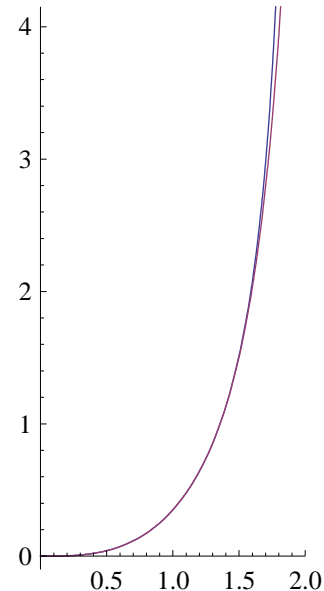


Abbildung 5.2: Links die Berechnung und rechts Skizzen des approximierenden Polynoms von Grad 15 und der echten Lösung.

## Picard-Iteration

Statt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

zu betrachten, kann man auch versuchen eine Lösung zu finden von

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (5.3)$$

**Lemma 5.5** Seien  $f : [a, b] \times [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y : [a, b] \rightarrow [\gamma, \delta]$  stetige Funktionen mit  $x_0 \in (a, b)$ . Dann sind äquivalent:

- $y$  ist differenzierbar und erfüllt das Anfangswertproblem (5.2).
- $y$  erfüllt die Integralidentität (5.3).

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es gilt

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

( $\Leftarrow$ ) Wenn  $x \mapsto y(x)$  und  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  stetig sind, ist auch  $x \mapsto f(x, y(x))$  stetig und die rechte Seite von (5.3) ist stetig differenzierbar. Das heißt  $x \mapsto y(x)$  ist stetig differenzierbar und

$$y'(x) = \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right)' = f(x, y(x)).$$

■

### Algorithmus 5.6 [Picard Iteration]

Man definiere eine Funktionenfolge  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mittels

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds. \end{aligned}$$

**Beispiel 5.7** *Wiederum betrachten wir das Anfangswertproblem:*

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y(x)^2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

*Die Integralgleichung wird*

$$y(x) = 0 + \int_0^x (s^2 + y(s)^2) ds.$$

*Wir finden*

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3}x^3, \\ y_2(x) &= \int_0^x \left( s^2 + \left( \frac{1}{3}s^3 \right)^2 \right) ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}x^7, \\ y_3(x) &= \int_0^x \left( s^2 + \left( \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{3^2 \cdot 7}s^7 \right)^2 \right) ds = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}, \\ &\dots \end{aligned}$$

*Man vergleiche mit Beispiel 5.4.*

# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 6

### Lokale Existenz einer Lösung



#### 6.1 Fixpunkte

Die Approximationsvorgänge aus der letzten Woche haben alle die folgende Form:

- $y_0$  ist eine vernünftig gewählte Startfunktion;
- $y_{n+1} = T(y_n)$  mit  $T$  einer Abbildung, die aus einer bekannten Funktion  $y_n$  eine neue Funktion  $y_{n+1}$  konstruiert.

Man hofft dabei, dass man  $y_0$  so gewählt hat und der Operator  $T$  so konstruiert ist, dass die Funktionenfolge konvergiert. Wenn  $y_n \rightarrow y_\infty$  und  $T$  stetig ist, dann sollte gelten, dass

$$y_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = T(y_\infty).$$

Im Fall, dass man  $y_0$  als konstante Funktion  $x \mapsto y_0$  nimmt und der Operator  $T$  wie folgt definiert wird,

$$T(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

würde Lemma 5.5 uns eine Lösung des Anfangswertproblems bringen wenn wir eine stetige Funktion  $y_\infty$  hätten mit  $y_\infty = T(y_\infty)$ . Man nennt  $y_\infty$  einen **Fixpunkt** von  $T$ .

##### 6.1.1 Wiederholung

Bevor wir genaue Sätze formulieren können, müssen wir das mathematische Werkzeug bereitlegen.

**Definition 6.1** Ein Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  über  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) ist eine Menge mit einer Addition und mit einer Multiplikation mit Skalaren, die folgende Eigenschaften hat:

1.  $V$  ist geschlossen: aus  $v, w \in V$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  folgt  $c_1v + c_2w \in V$ ;
2.  $(V, +)$  ist eine Abelsche Gruppe.

3. Die Multiplikation erfüllt:  $c(v+w) = cv + cw$ ,  $(c_1 + c_2)v = c_1v + c_2v$ ,  $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$  und  $1v = v$  für alle  $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  und  $v, w \in V$ .

**Definition 6.2** Ein normierter Vektorraum  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$  über  $\mathbb{R}$  ist ein Vektorraum mit einer Norm  $\|\cdot\|$ . Eine Norm ist eine Abbildung von  $V$  nach  $[0, \infty)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
2.  $\forall c \in \mathbb{R} \forall v \in V : \|cv\| = |c| \|v\|$ ;
3.  $\forall v, w \in V : \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

**Definition 6.3** Sei  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im normierten Vektorraum  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ .

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge bezüglich  $\|\cdot\|$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v_m\| < \varepsilon.$$

- $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine konvergente Folge bezüglich  $\|\cdot\|$ , wenn es  $v \in V$  gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq M_\varepsilon \implies \|v_n - v\| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 6.3.1** Cauchy-Folgen werden auch Fundamentalfolgen genannt.

**Definition 6.4** Ein normierter Vektorraum  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$  heißt Banachraum, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.

**Bemerkung 6.4.1** Ein Banachraum wird auch vollständiger normierter Vektorraum genannt.

## 6.1.2 Funktionenfolgen

Für Funktionenfolgen  $\{f_n : I \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es verschiedene Konvergenztypen:

- Punktweise Konvergenz von  $f_n$  zu  $f$ :

$$\forall x \in I, \varepsilon > 0 \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} : n > n_{x,\varepsilon} \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- Gleichmäßige Konvergenz von  $f_n$  zu  $f$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Definition 6.5** •  $C[a, b]$  ist die Menge aller stetigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $C^1[a, b]$  ist die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt,  $f$  ist stetig auf  $[a, b]$ , differenzierbar in  $(a, b)$  und es gibt  $g \in C[a, b]$  mit  $f' = g$  auf  $(a, b)$ .

**Bemerkung 6.5.1** Definieren wir  $\|\cdot\|_\infty$  durch

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \tag{6.1}$$

dann wird  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  ein normierter Vektorraum.



Gleichmäßige Konvergenz und Konvergenz in  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm sind äquivalent. Das folgt aus die Äquivalenz folgender Aussagen :

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I : n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall x \in I \text{ und } n > n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > n_\varepsilon \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

**Lemma 6.6** *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.*

**Beweis.** Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  so eine Funktionenfolge und sei  $f$  der Limes. Gleichmäßig konvergent bedeutet: Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $n_1 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $x$  gilt

$$n > n_1 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man nehme  $m = n_1 + 1$ . Weil  $f_m$  stetig ist, gibt es  $\delta_\varepsilon$  mit

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f_m(x) - f_m(y)| < \varepsilon.$$

Es folgt für  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ , dass

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(y)| + |f_m(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Wie man von  $3\varepsilon$  auf  $\varepsilon$  kommt, sollte klar sein. ■

**Korollar 6.7**  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  mit  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$  ist ein Banachraum.

**Bemerkung 6.7.1** *Stetige Funktionen auf kompakten Gebieten haben ein Maximum. Darum gilt  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .*

**Beweis.** Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[a, b]$  eine Cauchy-Folge. Dann ist  $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  für jedes  $x \in [a, b]$  eine Cauchy-Folge. Weil  $\mathbb{R}$  vollständig ist, ist diese Folge konvergent. Setzen wir  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Weil es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gibt mit

$$n, m > n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

folgt für alle  $x \in [a, b]$ , dass

$$n, m > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

und auch, wenn wir  $m \rightarrow \infty$  schicken, dass

$$n > n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dann folgt auch

$$n > n_\varepsilon \implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Anders gesagt,  $f$  ist der Limes von  $f_n$  und das letzte Lemma liefert  $f \in C[a, b]$ . ■

### 6.1.3 Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

**Definition 6.8** Seien  $(V_1, \|\cdot\|_1)$  und  $(V_2, \|\cdot\|_2)$  zwei normierte Vektorräume und  $A$  eine Teilmenge von  $V_1$ .

- $T : A \subset V_1 \rightarrow V_2$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|v_1 - v_2\|_1 < \delta \implies \|T(v_1) - T(v_2)\|_2 < \varepsilon.$$

- $T : A \subset V_1 \rightarrow V_2$  heißt *gleichmäßig Lipschitz-stetig*, wenn gilt

$$\exists L > 0 : \|T(v_1) - T(v_2)\|_2 \leq L \|v_1 - v_2\|_1. \quad (6.2)$$

**Bemerkung 6.8.1** Gleichmäßig Lipschitz-stetige Abbildungen sind gleichmäßig stetig: Sei  $\varepsilon > 0$  und nehme  $\delta = L^{-1}\varepsilon$ . Aus  $\|x - y\|_1 < \delta$  folgt  $\|T(x) - T(y)\|_2 < \varepsilon$ .

**Bemerkung 6.8.2** Oft nennt man gleichmäßig Lipschitz-stetige Funktionen oder Funktionale einfach nur Lipschitz-stetig. Wir sagen „ $T$  erfüllt die **Lipschitz-Bedingung**“ auf  $A$ , wenn  $T$  auf  $A$  gleichmäßig Lipschitz-stetig ist.

**Bemerkung 6.8.3**  $L$  heißt **Lipschitz-Konstante**. Wenn  $L < 1$  gilt, nennt man  $T$  eine **Kontraktion** oder **kontrahierende** Abbildung.

### 6.1.4 Ein Fixpunktsatz

**Theorem 6.9 (Der Fixpunktsatz von Banach)** Sei  $A$  eine nichtleere, abgeschlossene Menge eines Banachraums  $(V, \|\cdot\|)$ . Sei  $T : A \rightarrow V$  eine Kontraktion mit  $T(A) \subset A$ .

- Dann hat die Gleichung  $T(v) = v$  genau eine Lösung  $\tilde{v}$  in  $A$ .
- Für jedes  $v_0 \in A$  konvergiert die Folge  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $v_{n+1} = T(v_n)$  nach  $\tilde{v}$ . Es gilt sogar, dass

$$\|v_n - \tilde{v}\| \leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|,$$

wobei  $L < 1$  die Lipschitz-Konstante für  $T$  auf  $A$  ist

**Beweis.** Man betrachtet die obige Folge und bemerkt, dass mit Induktion für jede  $v_0 \in A$  folgt, dass  $v_n \in A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Außerdem hat man

$$\|v_n - v_{n+1}\| = \|T(v_{n-1}) - T(v_n)\| \leq L \|v_{n-1} - v_n\|$$

und es folgt auch hier mit Induktion für  $m > n$ , dass

$$\|v_m - v_{m+1}\| \leq L^{m-n} \|v_n - v_{n+1}\|.$$

Man hat außerdem, dass

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|v_n - v_{n+1} + v_{n+1} - v_{n+2} + \cdots + v_{m-1} - v_m\| \leq \\ &\leq \|v_n - v_{n+1}\| + \|v_{n+1} - v_{n+2}\| + \cdots + \|v_{m-1} - v_m\| \leq \\ &\leq (1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-n}) \|v_n - v_{n+1}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|. \end{aligned}$$

Das bedeutet:  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge. Weil  $V$  ein Banachraum ist, ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sogar konvergent: es gibt  $\tilde{v} \in V$  mit  $\|v_n - \tilde{v}\| \rightarrow 0$ . Weil  $A$  abgeschlossen ist, gilt  $\tilde{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in A$ . Auch hat man

$$\begin{aligned} \|v_n - \tilde{v}\| &= \left\| v_n - \lim_{m \rightarrow \infty} v_m \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|v_n - v_m\| \leq \\ &\leq \frac{1}{1-L} \|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L} \|v_0 - v_1\|. \end{aligned}$$

Diese Lösung  $\tilde{v}$  ist eindeutig, denn wenn auch  $\hat{v}$  ein Fixpunkt in  $A$  wäre, folgt

$$\|\tilde{v} - \hat{v}\| = \|T(\tilde{v}) - T(\hat{v})\| \leq L \|\tilde{v} - \hat{v}\|$$

und  $\|\tilde{v} - \hat{v}\| = 0$ . ■

## 6.2 Existenz nach Picard-Lindelöf

Wir betrachten wiederum das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

**Bedingung 6.10** Nehmen wir an  $y_0 \in (a, b)$  und:

1.  $f : [x_0, x_1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig;
2.  $f$  erfüllt die Lipschitz-Bedingung: es gibt  $L \in \mathbb{R}$  derart, dass für alle  $x \in [x_0, x_1]$  und  $y, z \in [a, b]$  gilt

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|. \quad (6.4)$$

Wenn wir diese Annahmen machen, können wir einiges folgern:

- Weil stetige Funktionen auf kompakte Gebieten beschränkt sind, gibt es  $M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, y)| \leq M \text{ für } (x, y) \in [x_0, x_1] \times [a, b]. \quad (6.5)$$

Für eine mögliche Lösung der Differentialgleichung bedeutet dies, dass  $-M \leq y'(x) \leq M$  und somit auch, dass

$$y_0 - M(x - x_0) \leq y(x) \leq y_0 + M(x - x_0) \quad (6.6)$$

jedenfalls wenn  $y(x) \in [a, b]$  und  $x \in [x_0, x_1]$  gilt. Sehe Abbildung 6.1.

- Weil  $y_0 \in (a, b)$  gibt es  $h > 0$  derartig, dass  $[y_0 - h, y_0 + h] \subset [a, b]$ .
- Es gibt  $\tilde{x} \in (x_0, x_1)$  derartig, dass

$$M(\tilde{x} - x_0) \leq h \text{ und } L(\tilde{x} - x_0) < 1. \quad (6.7)$$

Diese erste Ungleichung sorgt dafür, dass für  $x \in [x_0, \tilde{x}]$  der Kegel in (6.6) innerhalb des Rechtecks  $[x_0, x_1] \times [a, b]$  bleibt. Die zweite Ungleichung braucht man im Beweis des nächsten Theorems.

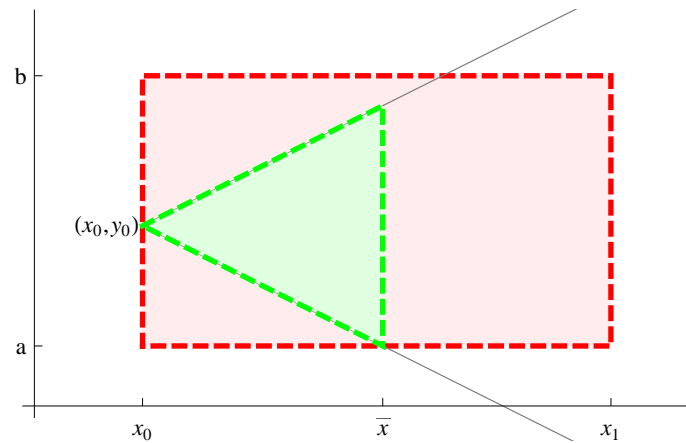


Abbildung 6.1: Durch die Begrenzung mit  $M$  verläuft jede Funktion aus der Picard-Iteration im grünen Kegel.

Um den Fixpunktsatz anzuwenden, nehmen wir als Banachraum  $(C[x_0, \tilde{x}], \|\cdot\|_\infty)$  und betrachten

$$K = \{y \in C[x_0, \tilde{x}]; \|y - y_0\|_\infty \leq h\}.$$

**Theorem 6.11 (Lokale Existenz nach Picard-Lindelöf)** Wenn  $f$  Bedingung 6.10 erfüllt, hat (6.3) genau eine Lösung  $y \in K$  und  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}]$ .

**Bemerkung 6.11.1** Wenn man dieses Ergebnis weniger technisch formulieren möchte, kann man das wie folgt machen:

Sei  $f$  eine Funktion, die stetig ist in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  und in dieser Umgebung die Lipschitz-Bedingung (6.4) erfüllt. Dann gibt es  $\tilde{x} > x_0$  und genau eine Funktion  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}]$  welche das Anfangswertproblem (6.3) löst.

**Bemerkung 6.11.2** Man kann dieses Ergebnis auch anwenden um eine Lösung  $y \in C^1[\hat{x}, x_0]$  mit  $\hat{x} < x_0$  zu finden. Weil die linke Ableitung in  $x_0$  von dieser Lösung gleich der rechten Ableitung von  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}]$  ist, kann man sogar sagen, dass man eine Lösung  $y \in C^1[\hat{x}, \tilde{x}]$  hat mit  $x_0 \in (\hat{x}, \tilde{x})$ .

**Beweis.** Sei  $T$  die Picard-Iteration für das Anfangswertproblem (6.3): Das heißt:

$$(T(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (6.8)$$

1.  $T(K) \subset C[x_0, \tilde{x}]$ . Weil  $f$  wohldefiniert und stetig ist auf  $[x_0, \tilde{x}] \times [a, b]$  ist auch  $Ty$  stetig.
2.  $T$  auf  $K$  ist beschränkt: Wegen (6.5) und (6.4) folgt für  $x \in [x_0, \tilde{x}]$  und  $y \in K$ , dass

$$\begin{aligned} |(T(y))(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \leq \int_{x_0}^x M ds = M(x - x_0). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Man findet mit (6.7) für  $x \in [x_0, \tilde{x}]$ :

$$-h \leq (T(y))(x) - y_0 \leq h.$$

Das heißt

$$y \in K \implies \|T(y) - y_0\|_\infty \leq h$$

und es folgt, dass  $T(K) \subset K$ .

3.  $T : K \rightarrow K$  ist eine Kontraktion: Seien  $y, z \in K$  dann gilt

$$\begin{aligned} |(T(y))(x) - (T(z))(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \leq \int_{x_0}^x L |y(s) - z(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x L \|y - z\|_\infty ds \leq L (\tilde{x} - x_0) \|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Weil  $c := L (\tilde{x} - x_0) < 1$  folgt, dass

$$\|T(y) - T(z)\|_\infty \leq c \|y - z\|_\infty.$$

4. Weil  $K$  eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge des Banachraums  $C[x_0, \tilde{x}]$  ist, folgt aus dem Fixpunktsatz von Banach, dass es genau einen Fixpunkt  $\tilde{y}$  von  $T$  in  $K$  gibt.

5. Weil  $\tilde{y}$  stetig ist, gilt  $x \mapsto f(x, \tilde{y}(x)) \in C[x_0, \tilde{x}]$  und

$$x \mapsto \tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \tilde{y}(s)) ds \in C^1[x_0, \tilde{x}].$$

Lemma 5.5 besagt, dass  $\tilde{y}$  sogar eine Lösung des Anfangswertproblems ist. ■

**Bemerkung 6.11.3** *Das wesentlichste im Beweis ist, dass die Lipschitz-Bedingung, welche wir annehmen für die Funktion  $f : [x_0, x_1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L |u - v|,$$

*dafür sorgt, dass der Operator  $T : K \subset C[x_0, \tilde{x}] \rightarrow K$  eine Kontraktion ist für  $|\tilde{x} - x_0|$  genügend klein: Es gibt  $c < 1$  mit*

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq c \|y_1 - y_2\|.$$

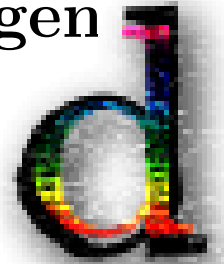
*Wir werden spätestens beim Existenzsatz von Peano sehen, dass diese Bedingung nicht notwendig ist für die Existenz einer Lösung. Sie macht den Beweis von Picard-Lindelöf aber wesentlich einfacher als den zum Satz von Peano.*



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 7

### Globale Existenz einer Lösung



#### 7.1 Von lokal zu global

Wir betrachten wiederum das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Eine erste Erweiterung der lokalen Existenz bekommt man, wenn  $f$  die folgenden Bedingungen erfüllt:

**Theorem 7.1** Sei  $(x_1, x_2) \ni x_0$  und  $(y_1, y_2) \ni y_0$  und setze  $R = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ . Nehme an  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt (Bedingung 6.10):

- $f$  ist stetig auf  $R$ ;
- $f$  erfüllt die Lipschitz-Bedingung: es gibt  $L > 0$  mit

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \text{ für alle } (x, u), (x, v) \in R.$$

Dann gibt es ein maximales Intervall  $[x_-, x_+] \subset [x_1, x_2]$  mit  $x_0 \in (x_-, x_+)$ , und genau eine Lösung  $y : [x_-, x_+] \rightarrow [y_1, y_2]$ . Außerdem gilt

1.  $y \in C^1[x_-, x_+]$ ;
2.  $y(x_+) = y_2$  oder  $x_+ = x_2$ ;
3.  $y(x_-) = y_1$  oder  $x_- = x_1$ .

**Beweis.** Aus der lokalen Existenz (Theorem 6.11) folgt, dass es  $\tilde{x} > x_0$  gibt und eine  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}]$ , welche die Differentialgleichung erfüllt.

Wenn  $(\tilde{x}, \tilde{y}) := (\tilde{x}, y(\tilde{x})) \in \partial R$  gilt, sind wir fertig. Wenn  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^\circ$  gilt, dann können wir erneut ein Randwertproblem betrachten, nämlich

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(\tilde{x}) = \tilde{y}. \end{cases}$$

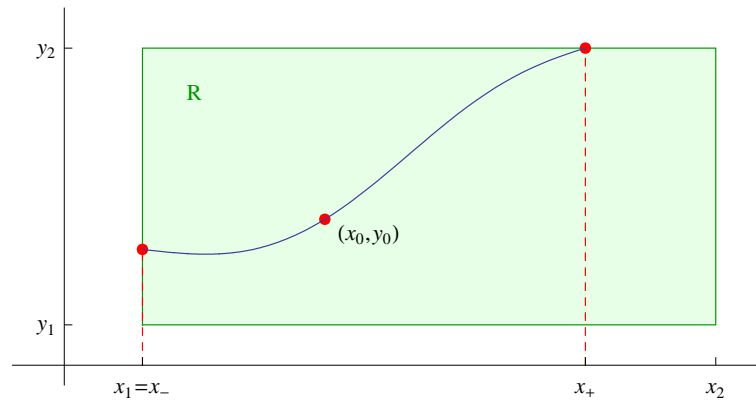


Abbildung 7.1: Eine Lösung kann nur am Rand aufhören.

und finden aus der lokalen Existenz, dass es  $\tilde{x}_a > \tilde{x}$  gibt und eine Lösung  $y_a \in C^1[\tilde{x}, \tilde{x}_a]$ , welche diese Gleichung erfüllt. Für  $u \in C^1[\tilde{x}, \tilde{x}_a]$  gilt  $\lim_{x \downarrow \tilde{x}} u'(x) = u'_r(\tilde{x})$  und weil  $f$  und  $y$  stetig sind, finden wir

$$y'_{a,r}(\tilde{x}) = \lim_{x \downarrow \tilde{x}} y'_a(x) = \lim_{x \downarrow \tilde{x}} f(x, y_a(x)) = f(\tilde{x}, y_a(\tilde{x})) = f(\tilde{x}, y(\tilde{x})).$$

Ebenso

$$y'_l(\tilde{x}) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}} y'(x) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}} f(x, y(x)) = f(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$$

und  $y_a$  setzt  $y$  stetig differenzierbar fort und liefert eine Lösung  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_a]$ . In  $\tilde{x}_a$  können wir erneut schauen wo sich  $(\tilde{x}_a, y(\tilde{x}_a))$  befindet: innerhalb  $R^\circ$  oder auf dem Rand  $\partial R$ .

Wenn diese Stelle sich jedesmal im Innern befindet, gibt es eine wachsende Folge  $\tilde{x}_i$  mit  $\tilde{x}_i \uparrow \tilde{x}_\infty$  und eine Lösung  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_\infty)$  mit  $\tilde{x}_\infty \in [x_1, x_2]$  maximal. Weil  $f$  beschränkt ist auf  $R$ , ist  $y'$  beschränkt auf  $R^\circ$  und existiert  $\lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} y(x)$ . Dann existiert  $\lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} y'(x) = \lim_{x \uparrow \tilde{x}_\infty} f(x, y(x))$  und es folgt, dass man  $y$  fortsetzen kann zu  $y \in C^1[x_0, \tilde{x}_\infty]$ . Wenn  $(\tilde{x}_\infty, y(\tilde{x}_\infty)) \in \partial R$  gilt, sind wir fertig. Wenn  $(\tilde{x}_\infty, y(\tilde{x}_\infty)) \in R^\circ$  gilt, wäre  $\tilde{x}_\infty$  nicht maximal.

Ähnlich können wir mit der lokalen Existenz eine Lösung  $y \in C^1[\hat{x}, x_0]$  für  $\hat{x} < x_0$  finden. Wie oben findet man, dass man links und rechts verbinden kann zu einer Lösung  $y \in C^1[\hat{x}, \tilde{x}]$ . ■

**Theorem 7.2 (Globale Existenz)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Nehme an,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$\exists L_\Omega > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_\Omega |y_1 - y_2| \text{ für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

Dann gibt es ein maximales (offenes) Intervall  $I = (x_-, x_+)$  mit

$$-\infty \leq x_- < x_0 < x_+ \leq +\infty,$$

und genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  von (7.1) mit  $(x, y(x)) \in \Omega$  für  $x \in I$ . Außerdem gilt

1.  $y \in C^1(I)$ ,
2.  $x_- = -\infty$  oder  $\lim_{x \downarrow x_-} (x, y(x)) \in \partial\Omega$  oder  $\lim_{x \downarrow x_-} \|y(x)\| = \infty$ , und



3.  $x_+ = \infty$  oder  $\lim_{x \uparrow x_+} (x, y(x)) \in \partial\Omega$  oder  $\lim_{x \uparrow x_+} \|y(x)\| = \infty$ .

**Bemerkung 7.2.1** Es kann sein, dass die Lösung sogar definiert ist bis in  $x_-$  oder  $x_+$ . Die Aussage ist, dass es kein größeres offenes Existenzintervall gibt. Wenn  $f$  auch außerhalb des Gebietes  $\Omega$  definiert ist, kann man möglicherweise eine Lösung außerhalb von  $\Omega$  fortsetzen. Selbsterständlich kann man ohne Annahmen keine Aussage machen wie eine solche Erweiterung sich benehmen würde.

**Beweis.** Aus Theorem 7.1 folgt, dass die Lösung in jedem Rechteck innerhalb  $\Omega$  mindestens bis zum Rand des Rechtecks fortzusetzen ist. Weil  $\Omega$  als offenes Gebiet aufzufüllen ist mit Rechtecken, folgt  $\lim_{x \uparrow x_+} (x, y(x)) \in \partial\Omega$ . ■

Wenn die Funktion  $f$  auch auf einem Teil des Randes von  $\Omega$  definiert ist, aber nur auf kompakten Teilmengen von  $\Omega$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, kann es sein, dass man die Lösung auf dem Rand  $\partial\Omega$  fortsetzen kann. Wenn  $f$  da nicht Lipschitz ist, kann man die Eindeutigkeit dort verlieren. Es kann also passieren, dass man lokal eine eindeutige Lösung hat, die global nicht eindeutig ist. In Beispiel 7.4 geschieht genau dies.

**Beispiel 7.3** Die rechte Seite des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2-y(x)^2}}, \\ y\left(\frac{2}{3}\right) = 1, \end{cases} \quad (7.2)$$

ist definiert für  $x^2 + y^2 \leq 5$ . Auf jede Kreisscheibe innerhalb,  $B_r(0,0)$  mit  $r < \sqrt{5}$ , ist  $f$  stetig und  $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$  beschränkt. Das bedeutet, dass das Anfangswertproblem genau eine Lösung hat, welche bis zum Rand  $\partial B_r(0,0)$  fortsetzbar ist. Weil solches für jedes  $r < \sqrt{5}$  gilt, existiert die Lösung bis sie den Rand  $\partial B_{\sqrt{5}}(0,0)$  erreicht.

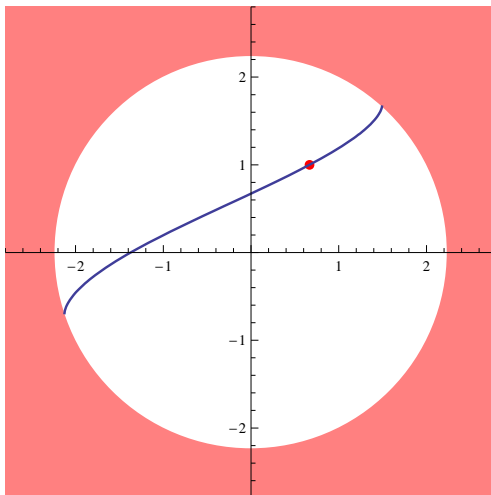


Abbildung 7.2: Skizze zu der Lösung aus Beispiel 7.3. Im roten Gebiet ist die Differentialgleichung nicht definiert. Die Lösung existiert bis zum Rand.

**Beispiel 7.4** Beim Randwertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{y(x)}, \\ y(2) = \frac{9}{16}, \end{cases} \quad (7.3)$$

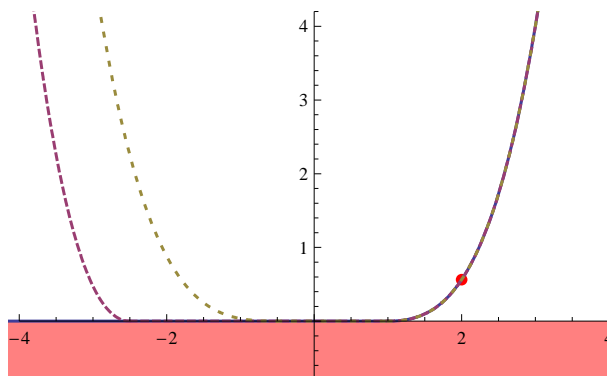


Abbildung 7.3: Skizzen zu einigen der Lösungen aus Beispiel 7.4. Auch auf dem Rand existieren Lösungen sind da aber nicht mehr eindeutig.

hat es lokal eine eindeutige Lösung, nämlich  $y : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$y(x) = \frac{1}{16} (x^2 - 1)^2$$

Die Funktion  $(x, y) \mapsto x\sqrt{y}$  ist gleichmäßig Lipschitz auf  $(-M, M) \times (\varepsilon, \infty)$  für alle  $\varepsilon, M \in \mathbb{R}^+$ . Innerhalb jedes Rechtecks  $(-M, M) \times (\varepsilon, \infty)$  sagt auch Theorem 7.2, dass es genau eine Lösung hat.

Betrachten wir  $(-M, M) \times [0, \infty)$ , dann gibt es mehrere Lösungen. Für  $c \geq 0$  sind alle Funktionen  $y_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Lösung des Randwertproblems, welche definiert sind durch

$$y_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} (x^2 - 1)^2 & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{für } -c < x < 1, \\ \frac{1}{16} (x^2 - c^2)^2 & \text{für } x \leq -c. \end{cases}$$

## 7.2 Das Lemma von Grönwall

Um präzisere Abschätzungen für eine Lösung und deren Existenzintervall zu bekommen, ist die folgende Ungleichung sehr nützlich.

**Lemma 7.5 (Die Ungleichung von Grönwall)** Seien  $y, \alpha, \beta : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen mit  $\beta \geq 0$ . Wenn

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \text{ für alle } s \in [x_0, x_1],$$

dann gilt

$$y(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(t)dt} ds \text{ für alle } s \in [x_0, x_1].$$

**Bemerkung 7.5.1** Wenn  $y(x) = \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)y(s)ds$  dann findet man, dass  $y$  sogar differenzierbar ist und dass  $y$  die lineare Differentialgleichung  $y'(x) = \alpha'(x) + \beta(x)y(x)$  erfüllt. Die Funktion  $y(x) = \alpha(x) + \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^x \beta(t)dt} ds$  ist eine Lösung.

**Beweis.** Man definiere

$$u(x) = \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right).$$

Dann ist  $u$  differenzierbar und es gilt weil  $\beta \geq 0$ , dass

$$\begin{aligned} u'(x) &= \beta(x) \left( y(x) - \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \right) \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right) \leq \\ &\leq \beta(x)\alpha(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(t)dt\right). \end{aligned}$$

Man integriere und findet

$$u(x) = u(x) - u(x_0) \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(-\int_{x_0}^s \beta(t)dt\right) ds.$$

Wenn wir nun wieder  $y$  benutzen, folgt

$$\exp\left(-\int_{x_0}^x \beta(s)ds\right) \int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(-\int_{x_0}^s \beta(t)dt\right) ds$$

und anders dargestellt:

$$\int_{x_0}^x \beta(s)y(s) ds \leq \int_{x_0}^x \beta(s)\alpha(s) \exp\left(\int_s^x \beta(t)dt\right) ds$$

Zusammen mit nochmals der Annahme folgt das Ergebnis. ■

**Korollar 7.6** Sei  $f : [x_0, x_1] \times [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und derart, dass  $y_0 \in (y_1, y_2)$ . Nehme außerdem an

1. es gibt  $L_\Omega > 0$  derart, dass für alle  $(x, u), (x, v) \in [x_0, x_1] \times [y_1, y_2]$  gilt

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L_\Omega |u - v|,$$

2. und es gibt  $M > 0$  derart, dass für alle  $x \in [x_0, x_1]$  gilt

$$|f(x, y_0)| \leq M.$$

Nehme an  $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine stetige Funktion mit  $y(x) \in [y_1, y_2]$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$ . Wenn

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

dann gilt

$$|y(x) - y_0| \leq \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1) \text{ für } L_\Omega > 0.$$

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \leq \int_{x_0}^x (L_\Omega |y(s) - y_0| + |f(s, y_0)|) ds \leq \\ &\leq M(x - x_0) + \int_{x_0}^x L_\Omega |y(s) - y_0| ds. \end{aligned}$$

Für  $L_\Omega > 0$  folgt mit der Ungleichung von Grönwall, dass

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &\leq M(x - x_0) + L_\Omega \int_{x_0}^x M(s - x_0) e^{L_\Omega(x-s)} ds = \\ &= \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1). \end{aligned}$$

Für  $L_\Omega = 0$  folgt  $|y(x) - y_0| \leq M(x - x_0)$ . ■

Das Ergebnis liegt sehr nah bei dem was wir in Paragraph 2.4 schon bewiesen haben. Die Vergleichssätze kann man nicht geradeaus erweitern für vektorwertige Probleme. Mit dem Lemma von Grönwall verschwindet dieses Problem und kann man auch ohne viel Aufwand Systeme betrachten. Wir geben das Korollar. Für alle Deutlichkeit schreiben wir ausnahmsweise vektorwertige Funktionen mit einem Vektorzusatz (!).

**Korollar 7.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{f} : [x_0, x_1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und derart, dass  $y_0 \in \Omega$ . Nehme außerdem an

1. es gibt  $L_\Omega > 0$  derart, dass für alle  $(x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \in [x_0, x_1] \times \bar{\Omega}$  gilt

$$\left\| \vec{f}(x, \vec{u}) - \vec{f}(x, \vec{v}) \right\| \leq L_\Omega \|\vec{u} - \vec{v}\|,$$

2. und es gibt  $M > 0$  derart, dass für alle  $x \in [x_0, x_1]$  gilt

$$\left\| \vec{f}(x, \vec{y}_0) \right\| \leq M.$$

Nehme an  $\vec{y} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\vec{y}(x) \in \Omega$  für alle  $x \in [x_0, x_1]$  ist eine stetige Funktion. Wenn

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x \vec{f}(s, \vec{y}(s)) ds,$$

dann gilt

$$\|\vec{y}(x) - \vec{y}_0\| \leq \frac{M}{L_\Omega} (e^{L_\Omega(x-x_0)} - 1) \text{ für } L_\Omega > 0.$$

**Beweis.** Man schaue sich den Beweis von Korollar 7.6 an. ■

**Bemerkung 7.7.1** Mit  $\|\cdot\|$  ist die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^n$  gemeint. Integrale von Vektorwertige Funktionen werden pro Komponente definiert:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s) ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s) ds \end{pmatrix}.$$

Man kann nun sogar Korollar 2.17 für Systeme zeigen. Betrachte

$$\begin{cases} \vec{u}'(x) = \vec{f}(x, \vec{u}) \text{ für } x \in [0, \ell], \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \quad (7.4)$$

**Korollar 7.8 (Stetigkeit bezüglich der Anfangswerte)** Sei  $\vec{f} : [0, \ell] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und derart, dass es  $L > 0$  gibt derart, dass

$$\|\vec{f}(x, \vec{u}) - \vec{f}(x, \vec{v})\| \leq L \|\vec{u} - \vec{v}\| \text{ für alle } (x, \vec{u}), (x, \vec{v}) \in [0, \ell] \times \mathbb{R}^n.$$

Seien  $\vec{u}_a, \vec{u}_b : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lösungen von (7.4) mit Anfangswerte  $\vec{u}_{a,0}, \vec{u}_{b,0} \in \mathbb{R}^n$ . Dann folgt

$$\|\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t)\| \leq e^{Lt} \|\vec{u}_{a,0} - \vec{u}_{b,0}\| \text{ für } x \in [0, \ell]. \quad (7.5)$$

**Beweis.** Man hat

$$\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t) = \vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0) + \int_0^t \left( \vec{f}(s, \vec{u}_a(s)) - \vec{f}(s, \vec{u}_b(s)) \right) ds$$

und so folgt

$$\begin{aligned} \|\vec{u}_a(t) - \vec{u}_b(t)\| &\leq \|\vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0)\| + \int_0^t \left\| \vec{f}(s, \vec{u}_a(s)) - \vec{f}(s, \vec{u}_b(s)) \right\| ds \\ &\leq \|\vec{u}_a(0) - \vec{u}_b(0)\| + L \int_0^t \|\vec{u}_a(s) - \vec{u}_b(s)\| ds. \end{aligned}$$

Das Lemma von Grönwall liefert die gewünschte Abschätzung. ■

## 7.3 Differentialgleichungen mit $\mathbb{R}$ als Existenzintervall

**Lemma 7.9** Nehmen wir an  $x_0 \in (x_1, x_2)$  und  $f$  ist wie folgt:

1.  $f : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und
2.  $f$  erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf  $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}$ :

$$\forall x \in [x_1, x_2] \quad \forall u, v \in \mathbb{R} : |f(x, u) - f(x, v)| \leq L |u - v|. \quad (7.6)$$

Dann hat die Lösung von (6.3)  $[x_1, x_2]$  als Existenzintervall.

**Beweis.** Nehmen wir  $M = \max \{f(x, y_0); x \in [x_1, x_2]\}$  und

$$h = \frac{M}{L} \max (e^{L\Omega(x_2-x_0)}, e^{L\Omega(x_0-x_1)}),$$

dann folgt für  $R = [x_1, x_2] \times [y_0 - h, y_0 + h]$ , dass für das maximale Existenzintervall in  $R$  gilt  $x_+ = x_2$  und  $x_- = x_1$ . Durch die Abschätzung von Korollar 7.6 gilt  $y(x) \in (y_0 - h, y_0 + h)$  für  $x \in [x_-, x_+]$ . Aus Theorem 7.1 folgt  $(x_+, y(x_+)) \in \partial R$  und  $y(x_+) \in (y_0 - h, y_0 + h)$ . ■

**Korollar 7.10** Wenn  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, und  $|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v|$  für alle  $x, u, v \in \mathbb{R}$ , dann hat die Lösung von (6.3)  $\mathbb{R}$  als Existenzintervall.

**Beispiel 7.11** Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{1 + t^2 + x(t)^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Weil  $(t, x) \mapsto \sqrt{1 + t^2 + x^2}$  stetig ist auf  $\mathbb{R}^2$  und die Lipschitz-Bedingung auf  $\mathbb{R}^2$  erfüllt:

$$\left| \sqrt{1 + t^2 + x^2} - \sqrt{1 + t^2 + y^2} \right| = \left| \frac{\theta}{\sqrt{1 + t^2 + \theta^2}} (x - y) \right| \leq |x - y|, \quad (7.7)$$

gibt es genau eine Lösung die existiert auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Wir haben für (7.7) den Mittelwertsatz benutzt, der uns ein  $\theta \in (x, y)$  gibt für welches die obige Gleichung erfüllt ist. Man bemerke auch, dass die Funktion  $x \mapsto \sqrt{c + x^2}$  für  $c \geq 1$  eine durch 1 beschränkte Ableitung hat.

**Beispiel 7.12** Betrachten wir

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{1 + x(t)^4}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Die Funktion  $x \mapsto \sqrt{1 + x^4}$  hat keine beschränkte Ableitung und man kann vermuten, dass sie nicht gleichmäßig Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$  ist. Lokal ist die Lipschitz-Bedingung erfüllt und es gibt eine Lösung. Diese Lösung könnte aber nur ein endliches Existenzintervall besitzen.

Vergleichen wir mit

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dann bestätigt sich diese Vermutung. Die Lösung des letzten Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{1-t} \text{ mit } t \in (-\infty, 1).$$

Mit Theorem 2.12 findet man, dass  $x(t) \geq y(t)$  für  $t \geq 0$  für soweit beide Lösungen existieren. Das bedeutet, dass  $t_+ \leq 1$ .

Vergleicht man  $x(t)$  für  $t < 0$  mit

$$\begin{cases} z'(t) = 1, \\ z(0) = 1, \end{cases}$$

findet man  $x(t) \leq z(t) = 1 + t$  für  $t \leq 1$ , jedenfalls so lange  $x$  existiert. Wenn  $x$  in  $-2$  noch existieren würde findet man  $x(-2) \leq -1$  und wenn das gilt, können wir anschließend vergleichen mit

$$\begin{cases} w'(t) = w(t)^2, \\ w(-2) = -1. \end{cases}$$

Weil  $w(t) = \frac{-1}{t+3}$  für  $t > -3$  und  $\lim_{t \downarrow -3} w(t) = -\infty$ , folgt  $t_- \geq -3$ .

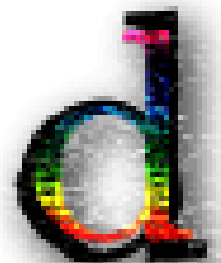




# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 8

### Nicht-lineare und linearisierte Systeme



#### 8.1 Gleichgewichtspunkte

Wir werden uns mit Anfangswertproblemen der folgenden Form beschäftigen:

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Das heißt, für  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $\vec{f} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$  gegeben und wir suchen zum Anfangswert  $\vec{y}_0$  eine Lösung  $\vec{y} : I \mapsto \mathbb{R}^n$  definiert auf dem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $(t, \vec{y}(t)) \in \Omega$  für  $t \in I$ . Diese Vektorschreibweise werden wir nicht durchziehen.

Wenn man sich den Beweis zum Picard-Lindelöf anschaut, kann man sich davon überzeugen, dass auch für das System in (8.1) ein ähnliches Ergebnis folgt. Ohne nochmals zu kontrollieren, dass alle Details des Beweises auch genau so weitergehen, geben wir das Resultat.

**Theorem 8.1 (Globale Existenz für Systeme)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Nehme an,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$\exists L_\Omega > 0 : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L_\Omega \|y_1 - y_2\| \text{ für alle } (t, y_1), (t, y_2) \in \Omega.$$

Dann gibt es ein maximales Intervall  $I = (t_-, t_+)$  mit

$$-\infty \leq t_- < t_0 < t_+ \leq +\infty,$$

und genau eine Lösung  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (8.1) mit  $(t, y(t)) \in \Omega$  für  $t \in I$ . Außerdem gilt

1.  $y \in C^1(I)$ ,
2. entweder  $t_- = -\infty$  oder  $\lim_{t \downarrow t_-} (t, y(t)) \in \partial\Omega$  oder  $\lim_{t \downarrow t_-} \|y(t)\| = \infty$ , und
3. entweder  $t_+ = \infty$  oder  $\lim_{t \uparrow t_+} (t, y(t)) \in \partial\Omega$  oder  $\lim_{t \uparrow t_+} \|y(t)\| = \infty$ .

Wenn die Funktion  $f$  nicht explizit von  $t$  abhängt, nennt man das System in (8.1) autonom:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (8.2)$$

**Definition 8.2** Wenn  $y_p \in \mathbb{R}^n$  so ist, dass  $f(y_p) = 0$ , dann heißt  $y_p$  ein Gleichgewichtspunkt für (8.2).

Ein Gleichgewichtspunkt wird auch kritischer Punkt oder Ruhepunkt genannt. Man sieht direkt, dass ein Gleichgewichtspunkt für (8.2) eine konstante Lösung  $y(t) = y_p$  liefert.

**Beispiel 8.3** Betrachten wir das System

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - y(t))x(t), \\ y'(t) = (1 + x(t) - y(t))y(t). \end{cases} \quad (8.3)$$

Weil die Funktion an der rechten Seite,  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-y)x \\ (1+x-y)y \end{pmatrix}$ , differenzierbar ist, ist lokal die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Für jeden Anfangswert  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  existiert also eine Lösung  $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ , die definiert ist auf einem Intervall  $(t_-, t_+)$  und

$$t_+ = \infty \text{ oder } \lim_{t \uparrow t_+} \left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\| = \infty.$$

Für das System findet man die Gleichgewichtspunkte, indem man

$$(2 - y)x = 0, \quad (1 + x - y)y = 0$$

löst. Die erste Gleichung liefert  $y = 2$  oder  $x = 0$ . Dann gibt uns die zweite Gleichung folgendes:

$$\begin{aligned} y = 2 &\implies (1 + x - 2)2 = 0 \implies x = 1, \\ x = 0 &\implies (1 + 0 - y)y = 0 \implies y \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Das bedeutet drei Gleichgewichtspunkte:  $(1, 2)$ ,  $(0, 1)$  und  $(0, 0)$ . Diese Gleichgewichtspunkte sind gleichzeitig auch konstante Lösungen.

**Definition 8.4** Wenn  $t \mapsto x(t) : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung ist von  $x'(t) = f(x(t))$  mit  $(t_-, t_+)$  maximal, dann nennt man

$$\{x(t); t_- < t < t_+\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine Lösungskurve oder Trajektorie.

**Bemerkung 8.4.1** Statt Lösungskurve oder Trajektorie wird manchmal auch das Wort Orbit benutzt.

Für ein autonomes System kann man die Eindeutigkeit noch etwas schärfer formulieren.

**Lemma 8.5** Wenn  $x \mapsto f(x)$  die Lipschitzbedingung erfüllt und  $x_a(\cdot)$  und  $x_b(\cdot)$  sind zwei Lösungen von  $x'(t) = f(x(t))$ , dann gilt für die zugehörigen Trajektorien entweder

- $\{\vec{x}_a(t); t_{a,-} < t < t_{a,+}\} = \{x_b(t); t_{b,-} < t < t_{b,+}\}$  oder
- $\{\vec{x}_a(t); t_{a,-} < t < t_{a,+}\} \cap \{x_b(t); t_{b,-} < t < t_{b,+}\} = \emptyset$ .

**Bemerkung 8.5.1** Man kann dieses Ergebnis auch so beschreiben, dass Trajektorien sich nicht schneiden.

**Beweis.** Nehmen wir an, es gibt  $t_a \in (t_{a,-}, t_{a,+})$  und  $t_b \in (t_{b,-}, t_{b,+})$  mit  $x_a(t_a) = x_b(t_b)$ . Dann gilt für die Funktion  $y$  definiert durch  $y(t) = x_b(t - t_a + t_b)$ , dass sie die Differentialgleichung erfüllt mit  $y(t_a) = x_b(t_b) = x_a(t_a)$ . Weil das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_a) = x_a(t_a), \end{cases}$$

genau eine Lösung hat, folgt  $x_b(t - t_a + t_b) = y(t) = x_a(t)$  und somit das Ergebnis. ■

Wir haben nun Gleichgewichtspunkte, die konstante Lösungen liefern und wissen das Lösungen mit anderen Anfangswerten existieren und eindeutig sind. Auch wenn man diese Lösungen nicht mit Hilfe expliziter Funktionen darstellen kann, möchten wir doch einige qualitative Aspekte genauer anschauen. Wir fangen an mit zwei Beispielen.

**Beispiel 8.6** Betrachtet man das System

$$\begin{cases} x'(t) = -\cos(y(t)) - 2x(t) \cos(y(t)^2) \cos(2x(t)), \\ y'(t) = \sin(x(t)) - 2 \sin(y(t)^2) \sin(2x(t)), \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} x'(t) = \cos(y(t)) - 2y \cos(y(t)^2) \cos(4x(t)) \\ y'(t) = 2 \sin(2x(t)) - 4 \sin(y(t)^2) \sin(4x(t)) \end{cases} \quad (8.5)$$

dann findet man (numerisch) sehr viele Gleichgewichtspunkten. Siehe Abbildung 8.1.

Setzen wir  $F(x, y) = \sin(y^2) \cos(4x) - \cos(2x) - \sin(y)$  dann folgt, dass für eine Lösung dieses System folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(x(t), y(t)) &= \left( \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} y'(t) \right) \Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \sin(2x) - 4 \sin(y^2) \sin(4x) \\ 2y \cos(y^2) \cos(4x) - \cos(y) \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(x(t),y(t))} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Damit finden wir, dass  $F(x(t), y(t)) = c$  und so, dass Trajektorien auch Niveaumengen von  $F$  sind. Wir kommen noch zurück auf solchen Systemen.

**Beispiel 8.7** Wir kommen nochmals zurück auf Beispiel 8.3, denn wir können noch mehr folgern. Die Gleichung  $(2 - y)x = 0$  liefert genau die Stellen wo  $x'(t) = 0$  gilt, oder anders gesagt, wo die Lösungskurve vertikal verläuft. Ebenso gibt  $(1 + x - y)y = 0$  die Stellen, wo die Lösungskurve horizontal verläuft. Damit können wir ein grobes Bild erstellen wie die Trajektorien verlaufen. Siehe Abbildung 8.2. Wenn wir einige Trajektorien numerisch approximieren lassen, bekommen wir das Bild in Abbildung 8.3.

## 8.2 Linearisieren

Wenn wir Lösungen des Beispiels 8.3 in einer Umgebung eines Gleichgewichtspunktes betrachten, dann sieht das so ziemlich ähnlich aus wie die Bilder bei linearen Systemen. Man könnte vermuten, dass ein lineares System die Lösung bei so einem Gleichgewichtspunkt approximieren könnte. Bevor wir irgendeinen Satz in dieser Richtung formulieren oder beweisen, geben wir erst eine Motivierung, welches lineare System das passende Verhalten liefern würde.

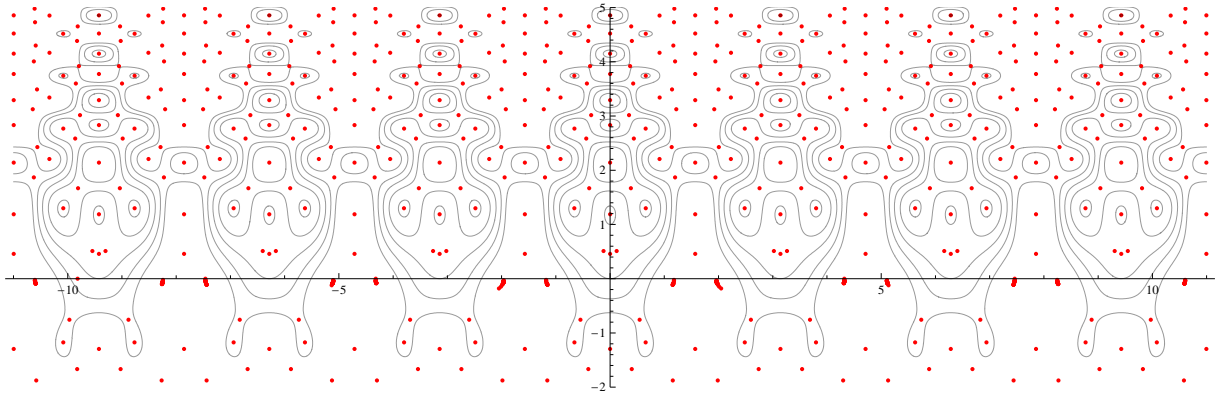


Abbildung 8.1: Skizze einiger Lösungskurven aus Beispiel 8.6 mit auch einigen Gleichgewichtspunkten. Das Beispiel ist inspiriert durch ein Beispiel im Buch von Borrelli und Coleman [1].

**Definition 8.8** Sei  $x_p$  ein Gleichgewichtspunkt für das System

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (8.6)$$

und sei die Funktion  $f$  differenzierbar in einer Umgebung von  $x_p$ . Dann ist

$$y'(t) = \nabla f(x_p) \cdot y(t) \quad (8.7)$$

das um  $x_p$  linearisierte System zu (8.6).

NB: Die rechte Seite in (8.7) kann man wie folgt mit einer Matrix beschreiben

$$\nabla f(x_p) \cdot y(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen von (8.7) werden wir grobweg wie folgt vergleichen mit Lösungen von (8.6):

$$x(t) \approx x_p + y(t).$$

Wenn wir  $x_p + y(t)$  einsetzen in (8.6) und  $f$  sogar beschränkte zweite Ableitungen hat, dann finden wir

$$\begin{aligned} (x_p + y(t))' &= y'(t) = \nabla f(x_p) \cdot y(t) \text{ und} \\ f(x_p + y(t)) &= f(x_p) + \nabla f(x_p) \cdot y(t) + \mathcal{O}(\|y(t)\|^2) = \\ &= \nabla f(x_p) \cdot y(t) + \mathcal{O}(\|y(t)\|^2). \end{aligned}$$

Man sieht, dass „nur“ ein quadratischer Term stört.

Für Beispiel 8.3 können wir die Vektorfelder mal vergleichen. Schauen Sie sich dazu Abbildung 8.4 an.

**Beispiel 8.9** Die linearisierten Systeme zu

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - y(t))x(t), \\ y'(t) = (1 + x(t) - y(t))y(t). \end{cases} \quad (8.8)$$

aus Beispiel 8.3 sind:

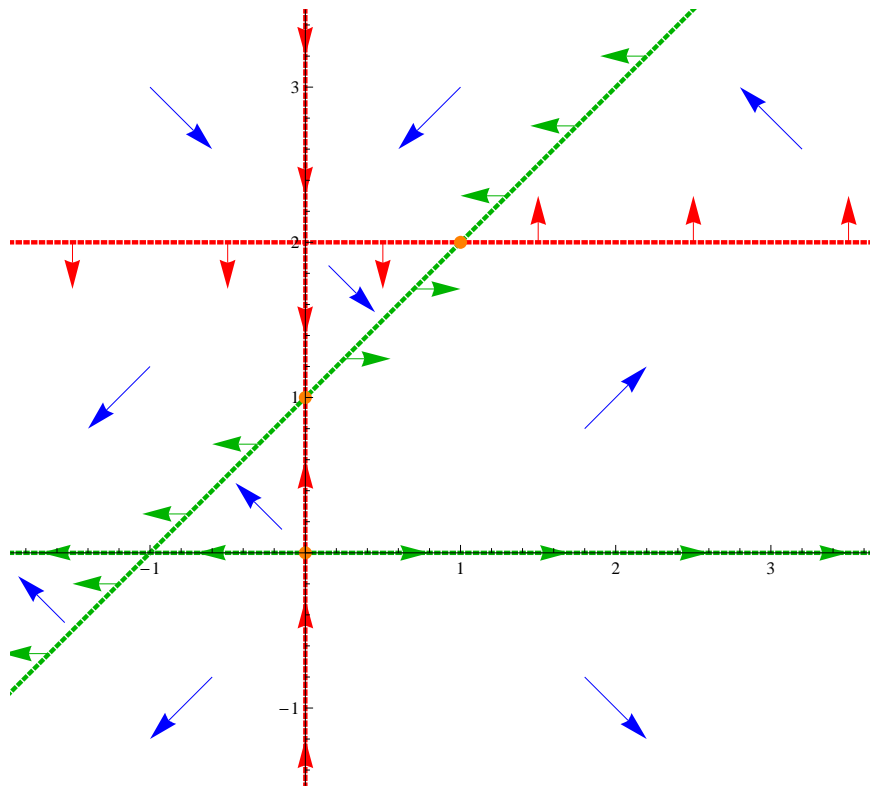


Abbildung 8.2: Skizze mit den Richtungen der Lösungskurven aus Beispiel 8.3.

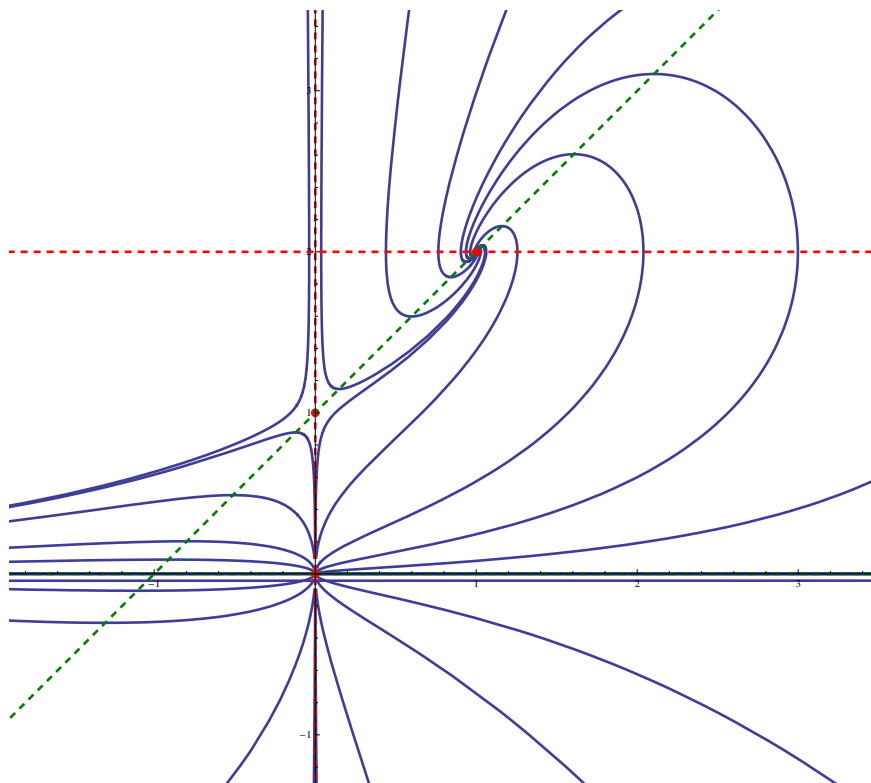


Abbildung 8.3: Skizze einiger numerisch approximierten Lösungskurven aus Beispiel 8.3. Man überlege sich mit Hilfe von Abbildung 8.2 in welcher Richtung diese Trajektorien durchlaufen werden.

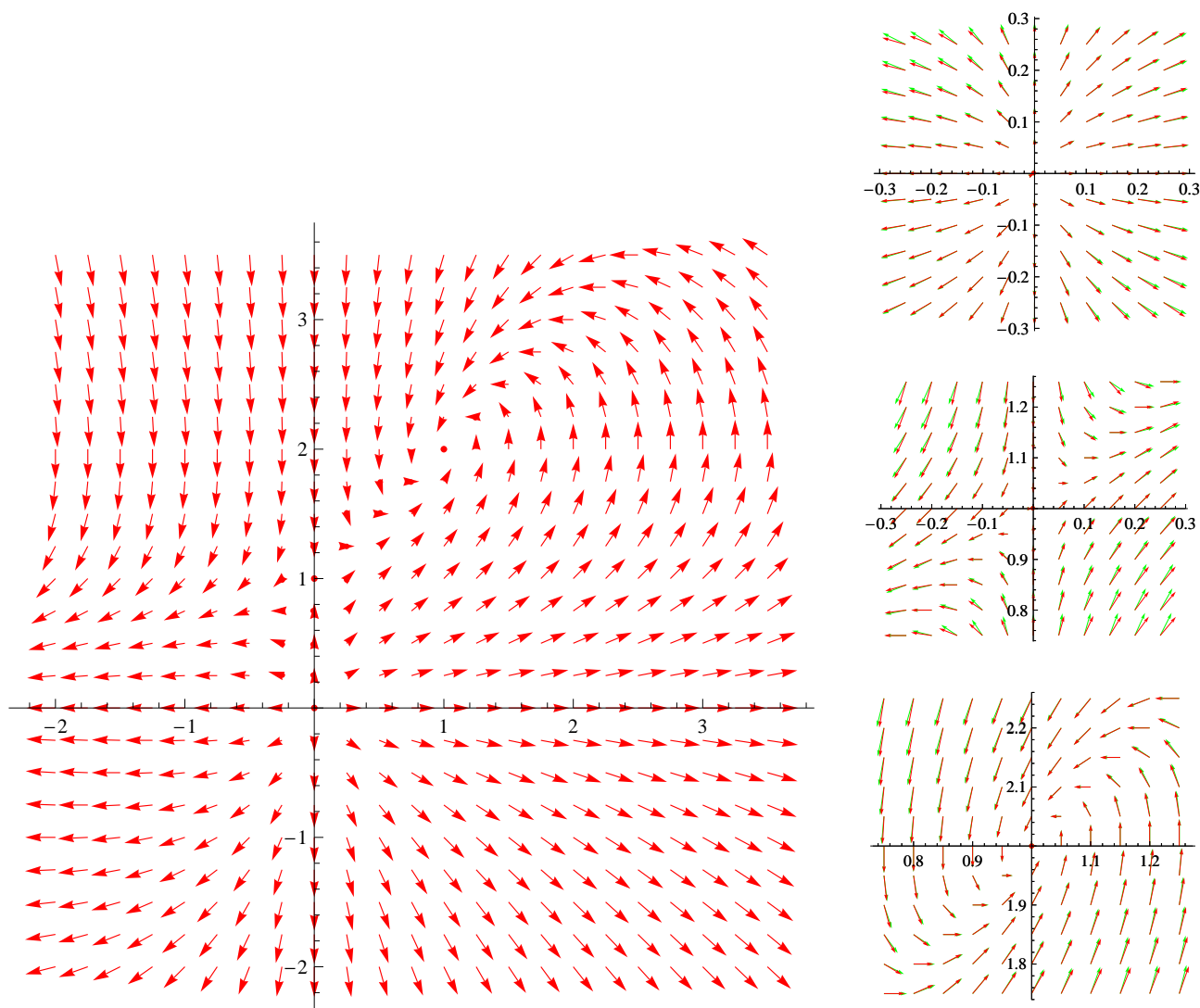


Abbildung 8.4: Das Vektorfeld zu Beispiel 8.3 und lokal verglichen mit den Vektorfelder der Linearisierungen um  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(1,2)$ . Die Vektorfelder zum linearisierten Problem sind in grün skizziert.

- Für  $x_p = (0,0)$  gilt

$$\begin{aligned} \nabla f(x_p) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2-y & -x \\ y & 1+x-2y \end{pmatrix}_{|(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wird das linearisierte System

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

- Für  $x_p = (0,1)$  findet man

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

- Für  $x_p = (1, 2)$  findet man

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

### 8.3 Definition Stabilität für nicht-lineare Systeme

Sei  $\Omega$  offen und sei  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion. Wir betrachten das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = f(x(t)). \quad (8.9)$$

**Definition 8.10** Sei  $x_p$  ein Gleichgewichtspunkt für (8.9). Dieser Gleichgewichtspunkt heißt

- **stabil**, wenn es für jede  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt derart, dass für jede Lösung  $x$  mit  $x(0) \in B_\delta(x_p)$  gilt, dass  $\{x(t); t \in \mathbb{R}^+\} \subset B_\varepsilon(x_p)$ .
- **instabil**, wenn  $x_p$  kein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Stabil bedeutet also, dass man für jede Umgebung  $U_1$  des Gleichgewichtspunktes eine (noch kleinere) Umgebung  $U_2$  wählen kann so, dass jede Lösung die in  $U_2$  anfängt, innerhalb der ersten Umgebung  $U_1$  bleibt. Weil „instabil“ die Verneinung dieser Eigenschaft ist, heißt das, dass es im Falle eines instabilen Gleichgewichtspunktes eine Umgebung  $U_1$  gibt und man Anfangswerte beliebig nahe am Gleichgewichtspunkt nehmen kann, die trotzdem außerhalb  $U_1$  geraten.

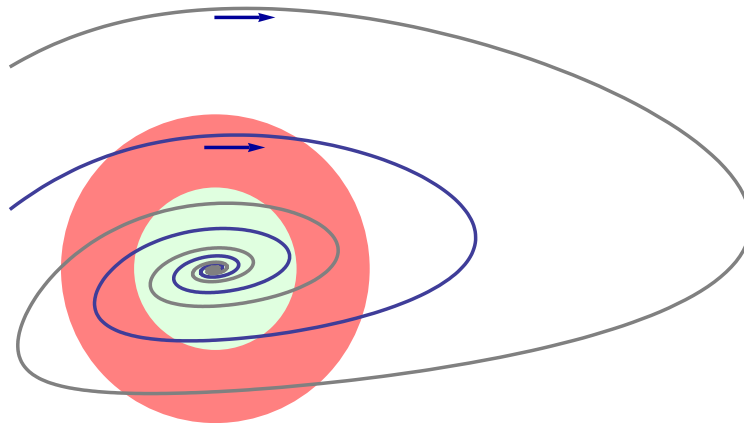


Abbildung 8.5: Ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Für jede (rote) Umgebung von  $x_p$  gibt es eine (grüne) Umgebung derart, dass wenn eine Trajektorie einmal innerhalb grün war, sie nie mehr außerhalb rot kommt.

**Definition 8.11** Sei  $x_p$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt für (8.9). Dieser Gleichgewichtspunkt heißt

- **asymptotisch stabil**, wenn  $x_p$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist und zusätzlich gilt: es gibt  $\varepsilon > 0$  derart, dass für jede Lösung mit  $x(0) \in B_\varepsilon(x_p)$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p;$$

- **neutral stabil**, wenn  $x_p$  stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Wenn man ein lineares System betrachtet, dann hat man nur ein Gleichgewichtspunkt, nämlich 0. Bei linearen Systemen ist lokales und globales Benehmen gleich. Einfacher gesagt: Wenn man auszoomt sieht das Bild noch genau gleich aus. Diese Tatsache sorgt dafür, dass man Stabilität bei linearen Systemen relativ einfach formulieren kann. Bei nicht-linearen Systemen ist das globale Verhalten verschieden vom lokalen. Das führt dazu, dass die Definitionen zur linearen Stabilität angepasst werden müssen und immer auf eine lokale Umgebung beschränkt werden. Wenn man genau hinschaut bemerkt man, dass die Definitionen hier mit denen aus Paragraph 4.3 für lineare Systeme übereinstimmen.

## 8.4 Stabilität von Gleichgewichtspunkten

Am schönsten wäre es, wenn die Stabilität des linearisierten Problems die Stabilität des Gleichgewichtspunktes im ursprünglichen Problem geben würde. Leider ist das nur fast der Fall.

**Theorem 8.12** Sei  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zweimal stetig differenzierbar und  $x_p$  ein Gleichgewichtspunkt für (8.9). Setze  $M = \nabla f(x_p)$ .

1. Wenn für jeden Eigenwert  $\lambda$  von  $M$  gilt  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , dann ist  $x_p$  ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.
2. Wenn es mindestens einen Eigenwert  $\lambda$  von  $M$  gibt mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , dann ist  $x_p$  ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

**Bemerkung 8.12.1** Im Fall, dass  $\max\{\operatorname{Re}(\lambda); \lambda \text{ Eigenwert von } M\} = 0$  gilt, kann aus der Linearisierung keine Schlußfolgerung gezogen werden bezüglich der Stabilität des Gleichgewichtspunktes.

Der Beweis benötigt einige technische Ergebnisse aus der Matrixrechnung und wird auf nächste Woche verschoben.

**Beispiel 8.13** Wir betrachten

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(2 - x(t) - y(t)), \\ y'(t) = y(t)(1 - x(t)y(t)). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte findet man aus

$$x(2 - x - y) = 0 \text{ und } y(1 - xy) = 0.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} (x = 0 \text{ oder } 2 - x - y = 0) \\ \text{und} \\ (y = 0 \text{ oder } 1 - xy = 0). \end{aligned}$$

- $x = 0$  und  $y = 0$  liefert  $(0, 0)$ .
- $x = 0$  und  $1 - xy = 0$  liefert keine Lösung
- $2 - x - y = 0$  und  $y = 0$  liefert  $(2, 0)$ .



- $2 - x - y = 0$  und  $1 - xy = 0$  liefert via  $y = \frac{1}{x}$  die Gleichungen  $2 - x - \frac{1}{x} = 0$  und  $2x - x^2 - 1 = 0$  den Gleichgewichtspunkt  $(1, 1)$ .

Aus  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(2 - x - y) \\ y(1 - xy) \end{pmatrix}$  folgt

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2x - y & -x \\ -y^2 & 1 - 2xy \end{pmatrix}.$$

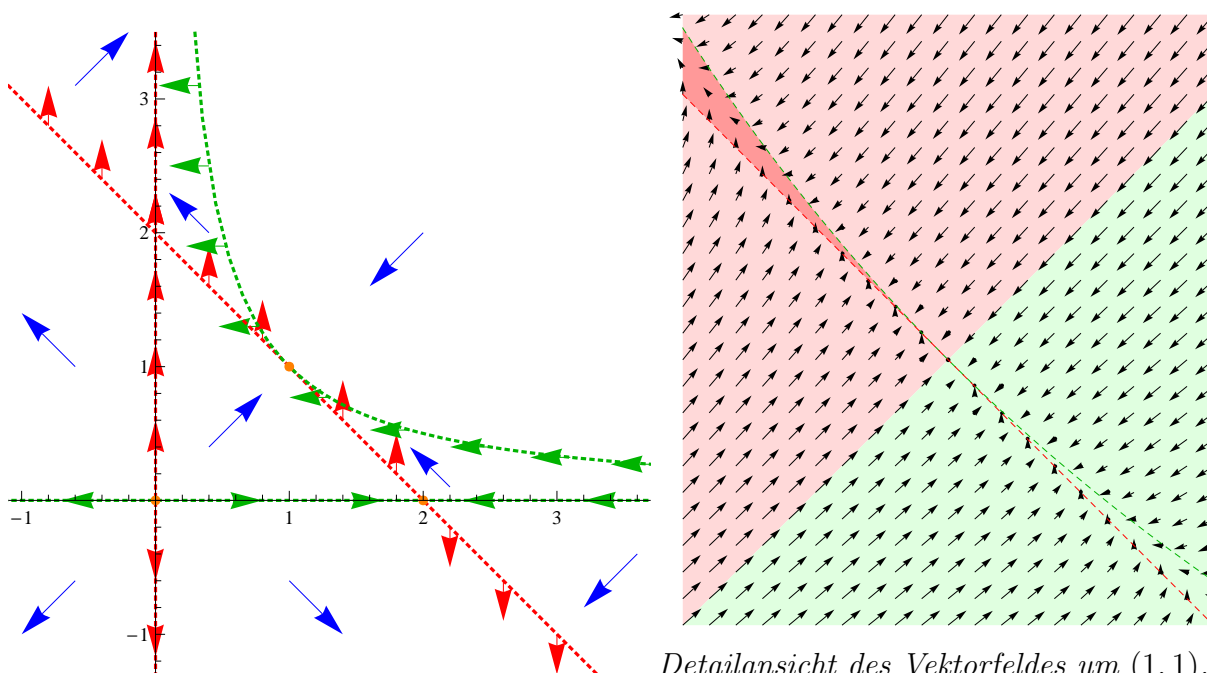
Die Matrizen in den Linearisierungen sind

$$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Das Theorem liefert uns Instabilität für die ersten beiden linearen Systeme als auch für die Gleichgewichtspunkte  $(0, 0)$  und  $(2, 0)$ . Die Linearisierung beim dritten Gleichgewichtspunkt ist stabil aber daraus können wir so direkt nichts für die Stabilität von  $(1, 1)$  schließen. Schaut man sich genau das Vektorfeld um  $(1, 1)$  an, dann sieht man, dass  $(1, 1)$  ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.



Detailansicht des Vektorfeldes um  $(1, 1)$ .

Abbildung 8.6: Die Linearisierung um  $(1, 1)$  gibt keine Auskunft bezüglich der Stabilität. Betrachtet man das Vektorfeld, dann kann man folgern, dass dieser Gleichgewichtspunkt instabil ist. Lokal kann man die Ebene in zwei Stücke verteilen. Trajektorien im hellgrünen Gebiet rechts unten konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  nach  $(1, 1)$ . Trajektorien im rosa Gebiet links oben verschwinden aus dem Bild durch den schmalen roten Spitz. Das heißt, dass man beliebig nahe an  $(1, 1)$  Anfangswerte finden kann, für die die Lösung aus einer Umgebung von  $(1, 1)$  verschwindet.



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 9



## Vergleich durch Linearisieren

### 9.1 Algebraische Vorbereitung zum Beweis des Stabilitätssatzes

Bei der Linearen Algebra hat man gezeigt, dass jede Matrix ähnlich einer Jordan-Matrix ist. Siehe Theorem 4.5.

**Lemma 9.1 (Reelle Alternative mit  $\varepsilon$  zur Jordan-Form)**

Sei  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $N, T \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  mit  $T$  invertierbar,  $M = TNT^{-1}$  und derart, dass

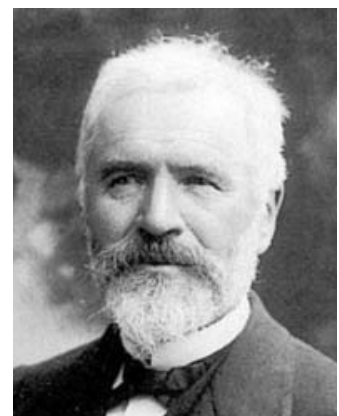
$$N = \begin{pmatrix} N_1 & O & \cdots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & N_m \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

mit reellen Eigenwerten  $\lambda_j$  in  $N_1$  bis  $N_k$ :

$$N_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

und mit Eigenwerten  $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  in  $N_{k+1}$  bis  $N_m$ :

$$N_m = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m & \varepsilon & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m & 0 & \varepsilon & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \varepsilon & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & \operatorname{funcIm} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$



Marie Jordan

**Beweis.** Die lineare Algebra lehrt uns, dass man jede Matrix auf Jordangestalt bringen kann. Mit Hilfe dieser Jordangestalt kann man bei reellen Matrizen sogar eine nah verwandte reelle Gestalt erreichen. Das geht wie folgt. Die reellen Eigenwerte, Eigenvektoren und generalisierte Eigenvektoren lässt man in Ruhe. Die komplexen Eigenwerte, Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren kombiniert man auf geschickte Art. Statt die komplexen (generalisierten) Eigenvektoren  $\varphi_m$  und  $\bar{\varphi}_m$  zu den komplexen Eigenwerten  $\lambda_m$  und  $\bar{\lambda}_m$ , nehmen wir für die neue Basis  $\operatorname{Re} \varphi_m$  und  $\operatorname{Im} \varphi_m$ . Weil  $\operatorname{Re} \varphi_m = \frac{1}{2}(\varphi_m + \bar{\varphi}_m)$  und  $\operatorname{Im} \varphi_m = -\frac{i}{2}(\varphi_m - \bar{\varphi}_m)$  gilt, ist auch die neue Basis tatsächlich eine Basis, das heißt, die Vektoren bilden ein unabhängiges und erzeugendes System. Es gilt

$$\begin{aligned} M \operatorname{Re} \varphi_m &= \frac{1}{2}(M\varphi_m + M\bar{\varphi}_m) = \frac{1}{2}(\lambda_m \varphi_m + \bar{\lambda}_m \bar{\varphi}_m) = \operatorname{Re} \lambda_m \operatorname{Re} \varphi_m - \operatorname{Im} \lambda_m \operatorname{Im} \varphi_m, \\ M \operatorname{Im} \varphi_m &= \dots = -\frac{i}{2}(\lambda_m \varphi_m - \bar{\lambda}_m \bar{\varphi}_m) = \operatorname{Im} \lambda_m \operatorname{Re} \varphi_m + \operatorname{Re} \lambda_m \operatorname{Im} \varphi_m. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Für generalisierten Eigenvektoren, also  $M\psi_m = \lambda\psi_m + \varphi_m$  und  $M\bar{\psi}_m = \bar{\lambda}\bar{\psi}_m + \bar{\varphi}_m$  gilt:

$$\begin{aligned} M \operatorname{Re} \psi_m &= \dots = \operatorname{Re} \lambda_m \operatorname{Re} \psi_m - \operatorname{Im} \lambda_m \operatorname{Im} \psi_m + \operatorname{Re} \varphi_m, \\ M \operatorname{Im} \psi_m &= \dots = \operatorname{Im} \lambda_m \operatorname{Re} \psi_m + \operatorname{Re} \lambda_m \operatorname{Im} \psi_m + \operatorname{Im} \varphi_m. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Ordnet man diese neue Basis so an, dass nach  $\operatorname{Re} \varphi_m$   $\operatorname{Im} \varphi_m$  folgt, dann finden wir folgendes:

$$M = T_1 S (T_1)^{-1}$$

mit  $S$  eine Blockmatrix wie in (9.1) und mit Teilmatrizen wie in (9.2):

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & O & \dots & O \\ O & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \dots & O & S_m \end{pmatrix}.$$

Man läßt die reellen Eigenwerte in  $S_1$  bis  $S_k$  und hat dort die übliche Jordankästchen:

$$S_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

In  $S_k$  bis  $S_{k+1}$  sammelt man paarweise die komplexen (generalisierten) Eigenwerte, wie soeben beschrieben, und man findet mit Hilfe von (9.4) und (9.5), dass:

$$S_m = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \operatorname{Re} \lambda_m & \operatorname{Im} \lambda_m \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 & -\operatorname{Im} \lambda_m & \operatorname{Re} \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Für das Ergebnis im Lemma skalieren wir die Basisvektoren wie folgt. Die Vektoren, die aus generalisierten Eigenvektoren von Ordnung  $m$  erstellt worden sind, multiplizieren wir

mit  $\varepsilon^m$ . Das führt zu  $M = TNT^{-1}$  wobei  $N$  und  $S$  sich nur bei den Nebendiagonalen Jordan-1 Einträgen unterscheiden. Statt 1 hat  $M$  dort nun  $\varepsilon$  stehen. ■

**Definition 9.2** Ein Skalarprodukt oder inneres Produkt auf einem reellen Vektorraum  $V$  ist eine symmetrische positiv definite Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Bemerkung 9.2.1** Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Bilinearform, wenn

$$\begin{aligned} x \mapsto \langle x, y \rangle \text{ linear ist für jedes } y \in V, \text{ und} \\ y \mapsto \langle x, y \rangle \text{ linear ist für jedes } x \in V. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Sie heißt symmetrisch, wenn

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ für jedes } x, y \in V. \tag{9.7}$$

Sie heißt positiv definit, wenn

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ für jedes } x \in V \text{ und } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \tag{9.8}$$

Wenn  $V$  endlich dimensional ist, kann man diese letzte Bedingung ersetzen durch: Es gibt  $c > 0$  derart, dass

$$\langle x, x \rangle \geq c \|x\|^2 \text{ für jedes } x \in V.$$

Dann sind  $\|\cdot\|$  und  $x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$  äquivalente Normen.

**Korollar 9.3** Sei  $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  eine Matrix mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nehme an,  $\operatorname{Re} \lambda_j$  hat  $m$  verschiedene Werte:

$$\begin{aligned} c_1 &= \operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{j_1} > \\ c_2 &= \operatorname{Re} \lambda_{j_1+1} = \dots = \operatorname{Re} \lambda_{j_2} > \\ &\dots \\ c_m &= \operatorname{Re} \lambda_{j_{m-1}+1} = \dots = \operatorname{Re} \lambda_n. \end{aligned}$$

Sei  $V_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) der Teilraum, der die zu  $c_j$  gehörigen (generalisierten) Eigenvektoren umspannt, und sei  $P_j : \mathbb{R}^n \rightarrow V_j$  die zugehörige Projektion mit  $\sum_{j=1}^m P_j = I$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  und  $T$  und  $N$  als im Lemma 9.1.

Dann ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , definiert durch

$$\langle x, y \rangle := x \cdot (TT^T)^{-1} y$$

ein Skalarprodukt. Außerdem gilt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m \langle P_j x, P_j y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\sum_{j=1}^m (c_j - \varepsilon) \langle P_j x, P_j x \rangle \leq \langle x, Mx \rangle \leq \sum_{j=1}^m (c_j + \varepsilon) \langle P_j x, P_j x \rangle.$$

**Beweis.** Weil  $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$  sind die Projektionen  $P_j$  mit  $\sum_{j=1}^m P_j = I$  eindeutig definiert.

Die Matrix  $TT^T$  ist symmetrisch und invertierbar. Ihre Eigenwerte sind positiv: Wegen Invertierbarkeit folgt  $\lambda \neq 0$  und aus  $TT^T\varphi = \lambda\varphi$  folgt

$$\|T^T\varphi\|^2 = \varphi \cdot TT^T\varphi = \varphi \cdot \lambda\varphi = \lambda \|\varphi\|^2 \text{ und } \lambda \geq 0.$$

Dann sind auch die Eigenwerte von  $(TT^T)^{-1}$  positiv und auch  $(TT^T)^{-1}$  ist positiv definit. Damit haben wir bewiesen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt ist.

Für  $j_1 \neq j_2$  gilt

$$\langle P_{j_1}x, P_{j_2}y \rangle = P_{j_1}x \cdot (TT^T)^{-1}P_{j_2}y = T^{-1}P_{j_1}x \cdot T^{-1}P_{j_2}y = 0$$

weil  $T^{-1}$  auf eine zu der Aufspaltung  $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$  passende Basis transformiert.

Wir haben

$$\langle x, Mx \rangle = x \cdot (TT^T)^{-1}Mx = x \cdot (T^T)^{-1}NT^{-1}x = T^{-1}x \cdot NT^{-1}x$$

Die Matrix  $N$  betrachtet die Teilräume getrennt und es folgt

$$\begin{aligned} \langle x, Mx \rangle &= T^{-1}x \cdot NT^{-1}x = \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=1}^m T^{-1}P_{\ell}x \cdot NT^{-1}P_jx = \\ &= \sum_{j=1}^m T^{-1}P_jx \cdot NT^{-1}P_jx = \sum_{j=1}^m \langle P_jx, MP_jx \rangle. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Das heißt, wir brauchen nur die einzelnen Kästchen  $N_j$  zu betrachten um das Ergebnis zu zeigen. Wir definieren dazu den Verschiebungsoperator  $\sigma$ :

$$\sigma \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\|\sigma y\| \leq \|y\|$  und es folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$|y \cdot \sigma y| \leq \|y\| \|\sigma y\| \leq \|y\|^2 \quad (9.10)$$

und ähnliches für  $\sigma^2$ . Bemerke, dass  $\sigma y = 0$ , wenn  $k = 1$ .

1. Der reelle Fall. Wir finden

$$y \cdot N_j y = y \cdot (\lambda y + \varepsilon \sigma y) = \lambda \|y\|^2 + \varepsilon y \cdot \sigma y$$

und mit (9.10) folgt

$$(\lambda - \varepsilon) \|y\|^2 \leq y \cdot N_j y \leq (\lambda + \varepsilon) \|y\|^2. \quad (9.11)$$

2. Der komplexe Fall. Man bemerke, dass die Beiträge von  $\text{Im } \lambda$  sich aufheben, weil man bei  $\text{Im } \lambda$  einmal ein Plus und einmal ein Minus hat:

$$\begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Re } \lambda & \text{Im } \lambda \\ -\text{Im } \lambda & \text{Re } \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_I \\ y_{II} \end{pmatrix} = \text{Re } \lambda (y_I^2 + y_{II}^2) + \text{Im } \lambda (y_I y_{II} - y_{II} y_I).$$

Es folgt, dass

$$y \cdot N_j y = y \cdot (\text{Re } (\lambda) y + \frac{1}{2}\varepsilon \sigma^2 y) = \text{Re } (\lambda) \|y\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon x \cdot \sigma^2 y$$

und hier finden wir

$$(\text{Re } \lambda - \varepsilon) \|y\|^2 \leq y \cdot N_j y \leq (\text{Re } \lambda + \varepsilon) \|y\|^2. \quad (9.12)$$

Aus (9.11) und (9.12) folgt

$$(c_j - \varepsilon) \|T^{-1}P_jx\|^2 \leq T^{-1}P_jx \cdot NT^{-1}P_jx \leq (c_j + \varepsilon) \|T^{-1}P_jx\|^2.$$

Mit (9.9) ist der Beweis für dieses algebraische Ergebnis komplett. ■

## 9.2 Der Beweis des Stabilitätssatzes

Nun haben wir genügend Werkzeug bereitgelegt um Theorem 8.12 beweisen zu können.

**Beweis von Theorem 8.12.** Sei  $x_p$  der betreffende Gleichgewichtspunkt und sei  $M = \nabla f(x_p)$  die Matrix aus der Linearisierung.

1) Es gilt  $\max \operatorname{Re} \lambda_j < 0$ . Setze  $\varepsilon = -\frac{1}{2} \max \operatorname{Re} \lambda_j$  und man nehme zu diesem  $\varepsilon$  ein Skalarprodukt aus Korollar 9.3. Sei  $x(t)$  eine Lösung und betrachte  $y(t) = x(t) - x_p$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle y(t), y(t) \rangle &= 2 \langle y(t), x'(t) \rangle = 2 \langle y(t), f(x_p + y(t)) \rangle = \\ &= 2 \langle y(t), M(y(t)) \rangle + \mathcal{O} \|y(t)\|^3 \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^m -\varepsilon \langle P_j y(t), P_j y(t) \rangle + \mathcal{O} \|y(t)\|^3 \leq -\varepsilon \langle y(t), y(t) \rangle \end{aligned}$$

für  $\|y(t)\|$  genügend klein. Es folgt

$$\langle y(t), y(t) \rangle \leq e^{-\varepsilon t} \langle y(0), y(0) \rangle.$$

Weil  $x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$  und  $\|\cdot\|$  äquivalente Normen sind, findet man auch, dass

$$\|x(t) - x_p\| = \|y(t)\| \leq C e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t}.$$

Damit hat man die asymptotische Stabilität.

2) Nehmen wir an, es gibt einen Eigenwert  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Sei nun  $\lambda_1$  ein Eigenwert mit

$$\operatorname{Re} \lambda_1 = \max \{ \operatorname{Re} \lambda; \lambda \text{ Eigenwert von } M \}.$$

Auch setzen wir  $\varepsilon = \min \{ \frac{1}{4}(c_1 - c_2), \frac{1}{4}c_1 \}$  mit  $c_j$  wie in Korollar 9.3. Wir nehmen als Anfangswert  $x_p + \delta \operatorname{Re} \varphi_1$  mit  $\delta > 0$ , nennen  $V_1$  den Teilraum zu den (generalisierten) Eigenwerten mit  $\operatorname{Re} \lambda = \operatorname{Re} \lambda_1$  und nehmen die Projektion  $P_1$  auf  $V_1$  wie in Korollar 9.3. Sei nun  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt wie Korollar 9.3 es uns liefert. Definiere den Kegel  $K$  durch

$$K = \{ x_p + y \in \mathbb{R}^n; \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle \leq \langle P_1y, P_1y \rangle \}.$$

Für  $x_p + y \in K$  gilt

$$\langle y, y \rangle = \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle + \langle P_1y, P_1y \rangle \leq 2 \langle P_1y, P_1y \rangle. \quad (9.13)$$

Man zeige nun, dass die Lösung mit  $x(0) = x_p + \delta \operatorname{Re} \varphi_1$  das Gebiet  $K \cap B_r(x_p)$  für  $r > 0$ , aber genügend klein, nur durch  $\partial B_r(x_p)$  verlassen kann. Für  $x_p + y \in \partial K$  gilt

$$\begin{aligned} \langle f(x_p + y), P_1y \rangle - \langle f(x_p + y), (I - P_1)y \rangle &= \langle My, P_1y \rangle - \langle My, (I - P_1)y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 = \\ &= NT^{-1}y \cdot T^{-1}P_1y - NT^{-1}y \cdot T^{-1}(I - P_1)y + \mathcal{O} \|y\|^3 \geq \\ &\geq (c_1 - \varepsilon) \langle P_1y, P_1y \rangle - (c_2 + \varepsilon) \langle (I - P_1)y, (I - P_1)y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 = (*) \end{aligned}$$

Wegen  $(c_1 - \varepsilon) - (c_2 + \varepsilon) > \varepsilon$  (9.13) folgt

$$(*) \geq \varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \langle P_1 y, P_1 y \rangle^{3/2} > 0$$

für  $x_p + y \in \partial K \cap B_r(x_p)$  mit  $r$  genügend klein. Anders gesagt, das Vektorfeld zeigt nach innen auf den Rand des Kegels. Weil

$$\begin{aligned} \langle f(x_p + y), P_1 y \rangle &\geq (c_1 - \varepsilon) \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \|y\|^3 \geq \\ &\geq 2\varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle + \mathcal{O} \langle P_1 y, P_1 y \rangle^{3/2} > \varepsilon \langle P_1 y, P_1 y \rangle \end{aligned}$$

für  $x_p + y \in K \cap B_r(x_p)$  mit  $r > 0$  genügend klein folgt, dass

$$\|x(t) - x_p\| \geq C e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \|x(0) - x_p\|$$

jedenfalls wenn  $x(t) \in K \cap B_r(x_p)$ . Das bedeutet Instabilität. ■

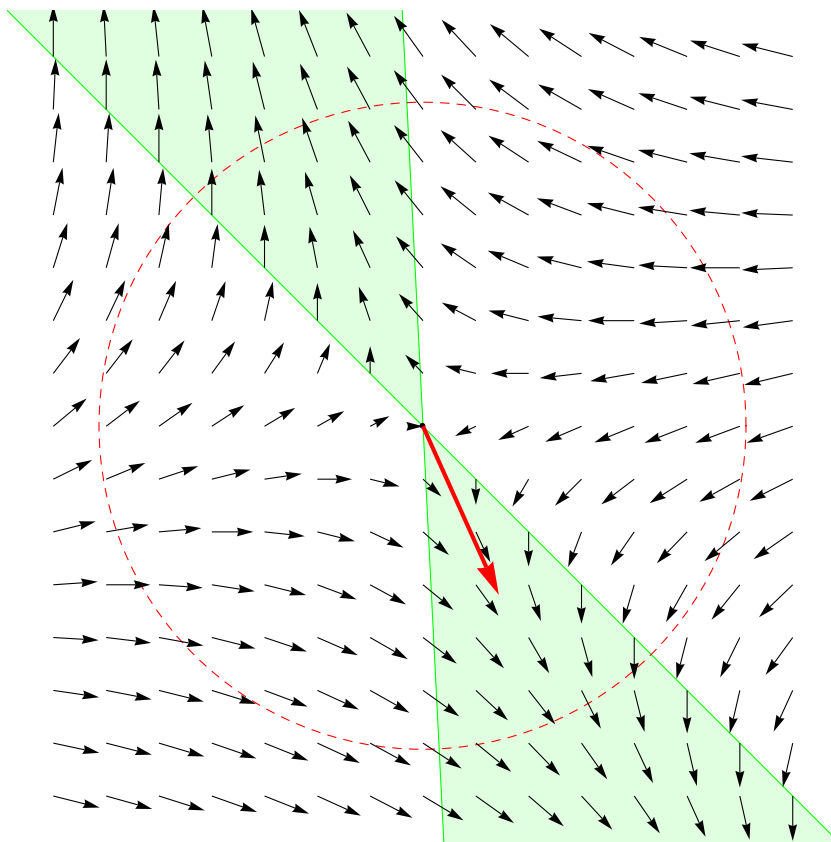


Abbildung 9.1: Idee beim Beweis der Instabilität. Am Rand des Kegels zeigt das Vektorfeld nach innen und weg von  $x_p$ .

### 9.3 Linearisierungssatz

Ohne Beweis zitieren wir Theorem 7.1 auf Seite 244 von Hartmanns Buch [2]:

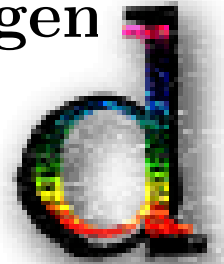
**Theorem 9.4** Sei  $f : B_\varepsilon(x_p) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $f(x_p) = 0$ . Wenn  $\nabla f(x_p)$  keinen Eigenwert mit  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  hat, dann gibt es Umgebungen  $U$  von  $x_p$  und  $V$  von 0 und eine stetige bijektive Abbildung  $h : V \rightarrow U$ , welche die Trajektorien der linearen Gleichung  $y'(t) = \nabla f(x_p) y(t)$  in  $V$  in die Trajektorien der nichtlinearen Gleichung  $x'(t) = f(x(t))$  in  $U$  überführt.



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 10

### Lotka, Volterra und Lyapunov



#### 10.1 Anwendungen in der Populationsdynamik

Wenn man zwei zusammenlebende Arten betrachtet die durch ihre Anwesenheit Einfluss auf die Größe der gegenseitigen Populationen nehmen, modelliert man solche Probleme oft durch quadratische Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) = R_1(x(t), y(t)) x(t), \\ y'(t) = R_2(x(t), y(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von  $R_1, R_2$  ab welcher Typ beschrieben wird mit dem System. Wir stellen einige Möglichkeiten vor.

##### 10.1.1 Das Räuber-Beute oder Lotka-Volterra Modell

In der englisch-sprachigen Literatur ist dieses Lotka-Volterra<sup>1</sup> Modell bekannt unter den Namen „predator-prey“. Die Zahl der Räuber (z.B. Mäusebussard) wird durch  $x$  beschrieben. Ohne Anwesenheit von Beute sterben sie aus und das natürliche Abklingen hat Rate  $\alpha$ . Wenn es Beute (Nagetiere) gibt, deren Zahl durch  $y$  beschrieben wird, kommt ein Term  $\beta y$  für den Zuwachs dazu. Dies liefert die Differentialgleichung  $x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t)$ . Nun betrachten wir die Beute. Diese Beute hat einen natürlichen Zuwachs mit Rate  $\gamma$  und wird reduziert durch die anwesenden Räuber mit Faktor  $\beta$ . Die Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und  $\delta$  sind positiv. Das bringt uns auf

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - \delta x(t)) y(t). \end{cases} \quad (10.1)$$

Weil die rechte Seite als Funktion von  $(x, y)$  differenzierbar ist, hat dieses System für jeden Anfangswert  $(x(0), y(0))$  eine eindeutige Lösung. Das bedeutet auch, dass wenn  $x(t) \neq 0$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  solches gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  und ähnliches für  $y$ .

---

<sup>1</sup>Volterra war ein italienischer Mathematiker, der diese Modelle studiert hat in *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (1931, Lektionen über die mathematische Theorie über den Kampf ums Leben). Aufgefordert dazu wurde er von seinem Schwiegersohn, der als Biologe den Fischbestand im adriatischen Meer während und nach dem ersten Weltkrieg studierte. Lotka war ein amerikanischer Biologe, der unabhängig davon zu ähnlichen Modellen kam.

Der nichttriviale Gleichgewichtspunkt ist

$$(x, y) = \left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Linearisiert man bei diesem Punkt, findet man

$$\nabla f \left( \frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}$$

und das ist ein Zentrum. Weil  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  kann man keine sofortige Aussage machen zu der Stabilität oder zum Bild der Trajektorien. Auch Theorem 9.4 ist nicht anwendbar.

**Lemma 10.1** *Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ . Dann sind die Trajektorien von (10.1) in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ , außer dem Gleichgewichtspunkt, geschlossene Kurven. Die dazugehörigen Lösungen sind periodisch*

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, dass  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Sei  $t \mapsto (x(t), y(t))$  eine Lösung in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Dann hat man

$$\left( \frac{\gamma}{x(t)} - \delta \right) x'(t) = \frac{x'(t)y'(t)}{x(t)y(t)} = \left( \frac{-\alpha}{y(t)} + \beta \right) y'(t)$$

und es folgt, dass es eine Konstante gibt derart, dass

$$\gamma \ln(x(t)) - \delta x(t) = -\alpha \ln(y(t)) + \beta y(t) + c.$$

Anders gesagt, die Trajektorien  $\{(x(t), y(t)); t \in (t_-, t_+)\}$  sind Niveaumengen der Funktion

$$F(x, y) = \gamma \ln(x) - \delta x + \alpha \ln(y) - \beta y.$$

Diese Niveaumengen sind konvexe beschränkte Kurven, weil  $x \mapsto F(x, y)$  und  $y \mapsto F(x, y)$  konkav ist und weil  $F(x, y) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \downarrow 0$ ,  $y \rightarrow \infty$ , und für  $y \downarrow 0$ . Dann bleiben nur geschlossene Kurven übrig. Da kein Gleichgewichtspunkt (als Grenzwert) auf so einer Kurve liegt, ist die Lösung sogar periodisch. ■

**Lemma 10.2** *Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$ . Für die Durchschnittswerte einer Lösung von (10.1) in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  gilt;*

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ und } \bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

**Beweis.** Sei  $T$  die Periode einer Lösung. Der Durchschnittswert ist definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Wenn wir die zweite Differentialgleichung benutzen, finden wir

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)}$$

und es folgt

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{\gamma}{\delta} - \frac{y'(t)}{\delta y(t)} \right) dt = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{T\delta} (\ln(y(T)) - \ln(y(0))) = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Ähnlich folgt das Ergebnis für  $\bar{y}$ . ■

Wenn es keine Räuber gibt, wächst die Größe der Beute exponentiell zu  $\infty$ . Ein derartiges Modell ist nicht besonders glaubwürdig. Um diesem unnatürlichen Verhalten zuvor zu kommen, wird dieses Räuber-Beute Modell wie folgt geändert:

$$\begin{cases} x'(t) = (-\alpha - c_1x(t) + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Auch  $c_1$  und  $c_2$  sind positiv.

**Beispiel 10.3** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} x'(t) = (-1 + \frac{1}{4}y(t)) x(t), \\ y'(t) = (1 - \frac{1}{10}x(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0,0)$  und  $(10,4)$ . Linearisieren um  $(10,4)$  liefert

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

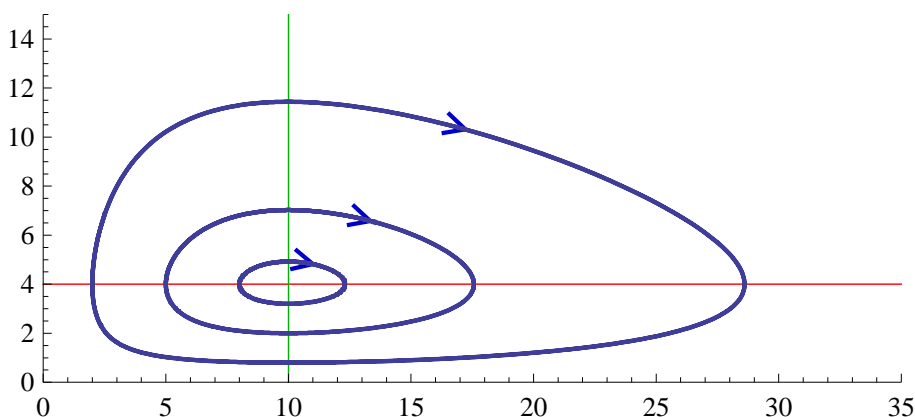


Abbildung 10.1: Skizze einiger Trajektorien aus Beispiel 10.3.

### 10.1.2 Das kooperative Modell oder Mutualismus

Man betrachtet zwei Spezies  $x$  und  $y$ , die gegenseitig von ihrer Anwesenheit profitieren:

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Ist man auch hier besorgt über die Überbevölkerung, kann man das System wiederum ändern in

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha + \beta y(t) - c_1x(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma + \delta x(t) - c_2y(t)) y(t). \end{cases}$$

Nicht jedes Paar positiver Konstanten  $c_1, c_2$  sorgt für beschränkte Lösungen.

### 10.1.3 Das Wettbewerbsmodell

Zwei verschiedene Arten, die beide um die gleichen Ressourcen kämpfen müssen, werden modelliert durch

$$\begin{cases} x'(t) = (\alpha - c_1x(t) - \beta y(t)) x(t), \\ y'(t) = (\gamma - c_2y(t) - \delta x(t)) y(t). \end{cases}$$

Es hängt von den Konstanten ab, ob beide Populationen gleichzeitig überleben können.

**Beispiel 10.4** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0,0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(1,0)$  und  $(0,1)$ . Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 4y \end{pmatrix}$$

und:

<i>Ggp.:</i>	$(0,0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(1,0)$	$(0,1)$
<i>Matrix:</i>	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
<i>Eigenwerte:</i>	2, 2	$-\frac{2}{3}, -2$	-2, 1	-2, 1
<i>Stabilität:</i>	<i>instabil</i>	<i>as. stabil</i>	<i>instabil</i>	<i>instabil</i>

Man kann zeigen, dass die Lösung mit  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  zu  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Die beiden Spezies können nebeneinander existieren.

**Beispiel 10.5** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} x'(t) = (2 - x(t) - 2y(t)) x(t), \\ y'(t) = (2 - 2x(t) - y(t)) y(t). \end{cases}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind  $(0,0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(2,0)$  und  $(0,2)$ . Man findet

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2x - 2y & -2x \\ -2y & 2 - 2x - 2y \end{pmatrix}$$

und:

<i>Ggp.:</i>	$(0,0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(2,0)$	$(0,2)$
<i>Matrix:</i>	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
<i>Eigenwerte:</i>	2, 2	$\frac{2}{3}, -2$	-2, -2	-2, -2
<i>Stabilität:</i>	<i>instabil</i>	<i>instabil</i>	<i>as. stabil</i>	<i>as. stabil</i>

Man kann zeigen, dass die Lösung mit  $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  und  $x(0) > y(0)$  zu  $(2,0)$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ . Wenn  $x(0) < y(0)$  folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0,2)$ .

Beide Arten können nicht nebeneinander überleben.

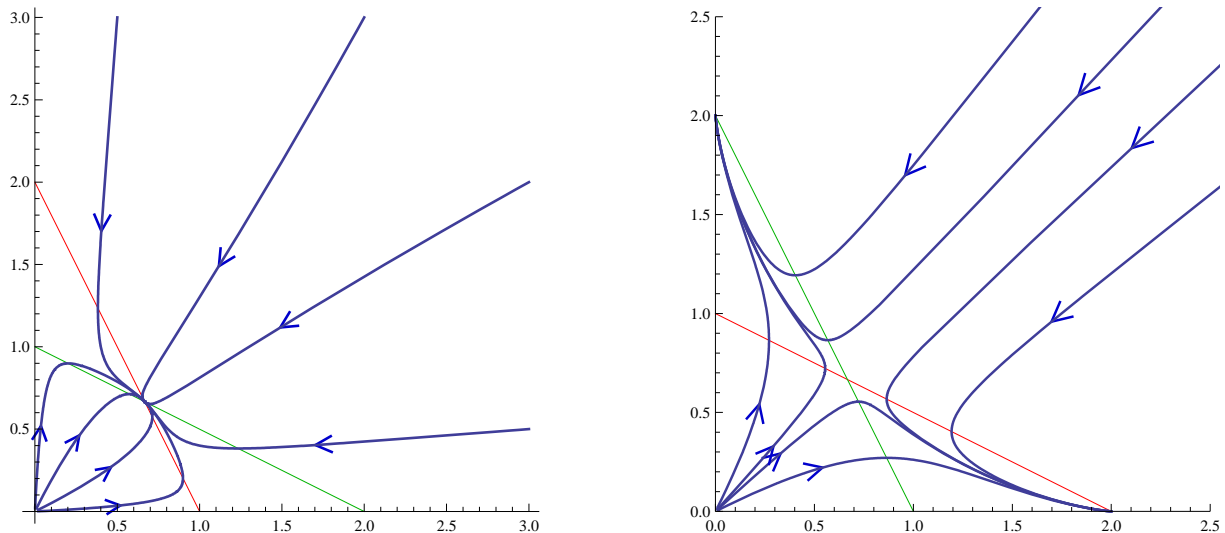


Abbildung 10.2: Skizze einiger Trajektorien aus den letzten Beispielen.

## 10.2 Lyapunov

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes Gebiet. Wir betrachten wiederum für  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Funktion das System

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (10.2)$$

und nehmen an  $x_p \in \Omega$  ist ein Gleichgewichtspunkt.

**Definition 10.6** Sei  $U$  eine Umgebung von  $x_p$ . Die  $C^1$ -Funktion  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine Lyapunov-Funktion für (10.2) beim Gleichgewichtspunkt  $x_p$ , wenn

1.  $V(x_p) = 0$ ;
2.  $V(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$ ;
3.  $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0$  für  $x \in U$ .

**Theorem 10.7** Sei  $V$  eine Lyapunov-Funktion für (10.2) beim Gleichgewichtspunkt  $x_p$ . Dann ist  $x_p$  stabil. Wenn sogar gilt, dass  $\dot{V}(x) < 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$ , dann ist  $x_p$  asymptotisch stabil.

**Beweis.** Sei  $t \mapsto x(t)$  für  $t \in [0, t_+)$  eine Lösung von (10.2) mit  $t_+$  maximal. Wenn  $\dot{V}(x) \leq 0$  für  $x \in U$ , dann gilt für  $t \in [0, t_+)$ , dass

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x(t)) = \dot{V}(x(t)) \leq 0$$

und für  $t \in [0, t_+)$  gilt

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) \, ds \leq 0.$$

Außerdem gilt  $t_+ = \infty$  oder  $\lim_{t \rightarrow t_+} u(t) \in \partial U$  oder  $\lim_{t \rightarrow t_+} |u(t)| = \infty$ .

1) Die Stabilität. Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir müssen zeigen, dass es  $\delta > 0$  gibt mit folgender Eigenschaft:

Wenn  $x(0) \in B_\delta(x_p)$ , dann folgt  $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$  für alle  $t > 0$ .

Sei  $K$  eine kompakte Menge in  $U$  mit  $x_p \in K \subset U^\circ$ . Wir dürfen annehmen, dass  $\varepsilon$  genügend klein ist, so dass  $B_{2\varepsilon}(x_p) \subset K$ . Definiere

$$c_\varepsilon = \inf \{V(x); x \in K \setminus B_\varepsilon(x_p)\}.$$

Weil  $K \setminus B_\delta(x_p)$  kompakt ist, und weil  $V(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_p\}$  folgt  $c_\varepsilon > 0$ . Weil  $V$  stetig ist und  $V(x_p) = 0$ , gibt es  $\delta > 0$  derart, dass  $V(x) < c_\varepsilon$  für  $x \in B_\delta(x_p)$ . Nehmen wir  $x(0) \in B_\delta(x_p)$ , dann folgt aus  $V(x(t)) \leq V(x(0)) < c_\varepsilon$ , dass  $x(t) \in B_\varepsilon(x_p)$  für  $t \in [0, t_+)$ , also auch, dass  $t_+ = \infty$ .

2) Die asymptotische Stabilität. Wegen des ersten Teils des Beweises wissen wir schon, dass  $x_p$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist. Auch haben wir, dass  $t \mapsto V(x(t))$  eine fallende Funktion ist, die nach unten durch 0 beschränkt ist. Dann existiert  $\ell := \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t))$ . Wenn  $\ell > 0$ , dann gilt  $V(x(t)) \geq \ell$  für alle  $t > 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $V$  gibt es  $\delta > 0$  derart, dass für  $|x - x_p| < \delta$  folgt  $V(x) < \ell$ . So haben wir gefunden, dass  $|x(t) - x_p| \geq \delta$  für alle  $t \in [0, \infty)$ . Weil  $V \in C^1$  und  $f$  stetig ist, ist  $\dot{V}$  stetig und mit der Kompaktheit von  $K \setminus B_\delta(x_p)$  folgt

$$d_\delta = \sup \left\{ \dot{V}(x); x \in K \setminus B_\delta(x_p) \right\} < 0$$

und so auch

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} V(x(s)) ds \leq d_\delta t \rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

ein Widerspruch. ■

**Beispiel 10.8** Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(t)^3 + x(t)y(t)^2 \\ -y(t)^3 - x(t)^2y(t) \end{pmatrix}.$$

Für Gleichgewichtspunkte gilt  $-x^3 + xy^2 = 0$  und  $-y^3 - x^2y = 0$ . Das führt via  $x(y-x)(y+x) = 0$  und  $y(x^2 + y^2) = 0$  zu  $(0, 0)$ . Die Linearisierung gibt keine Auskünfte bezüglich Stabilität oder Instabilität. Wir versuchen die Standard-Lyapunov-Funktion:

$$V(x, y) = |(x, y) - (0, 0)|^2.$$

Man sieht sofort, dass  $V(0, 0) = 0$  und  $V(x, y) > 0$  für  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Es gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x^3 + xy^2 \\ -y^3 - x^2y \end{pmatrix} = -2x^4 + 2x^2y^2 - 2y^4 - 2x^2y^2 = \\ &= -2x^4 - 2y^4 < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Also ist  $(0, 0)$  ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Weil dieses Argument sogar global ist, finden wir, dass jede Lösung zum Gleichgewichtspunkt konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ .

Man kann sogar die „Konvergenzgeschwindigkeit“ abschätzen. Weil

$$2x^4 + 2y^4 \geq x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

gilt, finden wir  $\dot{V}(x, y) \leq -V(x, y)^2$ . Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x(t), y(t)) \leq -V(x(t), y(t))^2$$

und via

$$\frac{-1}{V(x(t), y(t))} - \frac{-1}{V(x(0), y(0))} = \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} V(x(s), y(s))}{V(x(s), y(s))^2} ds \leq \int_0^t -1 ds = -t$$

finden wir

$$\frac{1}{V(x(t), y(t))} \geq \frac{1}{V(x(0), y(0))} + t$$

und

$$x(t)^2 + y(t)^2 = V(x(t), y(t)) \leq \frac{1}{\frac{1}{V(x(0), y(0))} + t} < \frac{1}{t}.$$

Diese letzte Abschätzung gilt für jeden Anfangswert!

**Definition 10.9** Wenn jede Lösung von  $x'(t) = f(x(t))$  zum Gleichgewichtspunkt  $x_p$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$ , dann nennt man  $x_p$  global asymptotisch stabil.

## 10.3 Systeme in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Für autonome Differentialgleichungssysteme  $x'(t) = f(x(t))$  in  $\mathbb{R}^2$  mit  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  haben wir die folgenden Lösungstypen gesehen.

- Lösungen die nach  $\infty$  abhauen. Genauer gesagt  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\lim_{t \uparrow t_+} |x(t)| = \infty$ . Es ist dabei möglich, dass  $t_+ = \infty$ .
- Konstante Lösungen. Das heißt  $x(t) = x_p$  für  $t \in \mathbb{R}$  mit  $x_p$  einem Gleichgewichtspunkt.
- Lösungen die nach einem Gleichgewichtspunkt konvergieren, also  $x : (t_-, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$ .
- Periodische Lösungen:  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $x(t+T) = x(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .
- Auch gibt es noch Lösungen, die zu einer periodischen Lösung konvergieren.

Ähnliches Verhalten kann man für  $t \downarrow t_- \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  unterscheiden. Mehr Typen gibt es nicht in  $\mathbb{R}^2$ . In einer Vorlesung „Dynamische Systeme“ wird man mehr erfahren.

Anfang der sechziger Jahre hat Edward Lorenz für eine Überraschung gesorgt, als er ein Beispiel eines Differentialgleichungssystems in  $\mathbb{R}^3$  brachte mit einem wesentlich anderem Benehmen. Das nach ihm benannte System ist wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(y-x) \\ cx - y - xz \\ xy - bz \end{pmatrix}.$$

Die Konstanten  $a, b, c$  wählt man in  $\mathbb{R}^+$ . Dieses System kam auf als er ein Modell für Strömungen in der Erdatmosphäre vereinfachte.

Für  $c \leq 1$  gibt es nur einen Gleichgewichtspunkt, nämlich  $(0, 0, 0)$  und dieser ist asymptotisch stabil. Es gilt

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - z & -1 & -z \\ y & x & -b \end{pmatrix} \text{ und } \nabla f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser letzten Matrix sind

$$-b \text{ und } -\frac{1}{2}(a+1) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 - 4(1-c)}. \quad (10.3)$$

Sie sind negativ für  $c < 1$ .

Für  $c > 1$  sind die Gleichgewichtspunkte (mit  $d = \sqrt{b(c-1)}$ ) wie folgt:

Ggp:	$(0, 0, 0)$	$(d, d, c-1)$	$(-d, -d, c-1)$
Matrix:	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & 1-c \\ d & d & -b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & 1-c \\ -d & -d & -b \end{pmatrix}$
Eigenw. <sup>2</sup> :	$\lambda_1 > 0 > \lambda_2, \lambda_3$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3}?$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3}?$
	instabil	$a, b, c$ -bedingt	instabil

Für  $a = 3$ ,  $b = 1$  und  $c = 25$  findet man eine Skizze einer Lösung in Abbildung 10.3. Derartige Lösungen nennt man chaotisch.

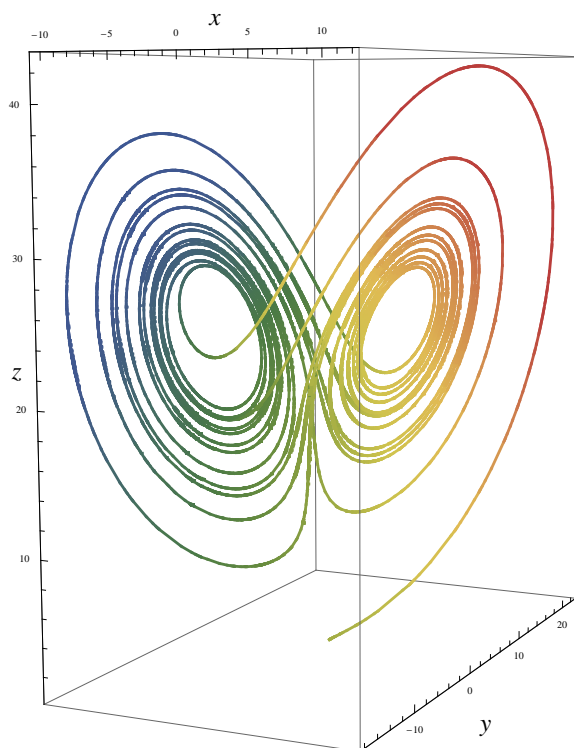


Abbildung 10.3: Eine chaotische Lösung

Die Lösung ist beschränkt aber konvergiert weder zu einem Gleichgewichtspunkt noch zu einer periodischen Lösung.

<sup>2</sup>Die Eigenwerte der ersten Matrix sind wie in (10.3). Einer ist jetzt positiv. Die Eigenwerte der zweiten Matrix sind Nullstellen von  $2ad^3/b + (b + ab + d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$ . Die Eigenwerte der dritten Matrix sind Nullstellen von  $-2ad^3/b + (b + ab - d^3/b)x + (1 + a + b)x^2 + x^3$ . Der Zwischenwertsatz liefert für diese Polynomen mindestens eine negative, beziehungsweise positive Nullstelle.



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 11

### Spezielles für zweite Ordnung



#### 11.1 Phasenebene

Wenn wir die autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''(t) = f(u(t), u'(t)) \quad (11.1)$$

studieren wollen, ist ein möglicher Ansatz diese Gleichung als System zu betrachten:

$$\begin{cases} u'(t) = v(t), \\ v'(t) = f(u(t), v(t)). \end{cases} \quad (11.2)$$

Wenn  $(u, v) \mapsto (v, f(u, v))$  lokal die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und sie ist erfüllt wenn  $f$  differenzierbar ist, dann hat das Anfangswertproblem für (11.2) genau eine Lösung. Dieses Ergebnis kann man auch für (11.1) anwenden.

**Lemma 11.1** *Nehmen wir an, dass für jedes beschränkte Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine Konstante  $L_\Omega \in \mathbb{R}^+$  existiert so, dass*

$$|f(u, v) - f(\bar{u}, \bar{v})| \leq L_\Omega (|u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|) \text{ für alle } (u, v), (\bar{u}, \bar{v}) \in \Omega. \quad (11.3)$$

*Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} u''(t) = f(u(t), u'(t)), \\ u(a) = u_0, \\ u'(a) = v_0, \end{cases} \quad (11.4)$$

*für jeden Anfangswert  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  genau eine Lösung  $u \in C^2(t_-, t_+)$  mit  $t_- < a < t_+$  und  $(t_-, t_+)$  ist das maximale Existenzintervall.*

**Beweis.** Man zeigt direkt, dass (11.3) gleichwertig ist zu einer lokalen Lipschitzbedingung für  $(u, v) \mapsto (v, f(u, v))$ . Der Existenz- und Eindeigkeitsatz liefert uns eine eindeutige Lösung für (11.2) mit maximalem Existenzintervall  $(t_-, t_+)$ . Für diese Lösung  $t \mapsto (u(t), v(t))$  gilt  $u, v \in C^1(t_-, t_+)$  und weil  $u' = v \in C^1(t_-, t_+)$  folgt  $u \in C^2(t_-, t_+)$ . ■

Die Menge der Trajektorien zu (11.2) nennt man auch die Phasenebene für (11.1).

**Beispiel 11.2** Ein Pendel mit Reibung proportional zur Geschwindigkeit hat folgende Differentialgleichung:

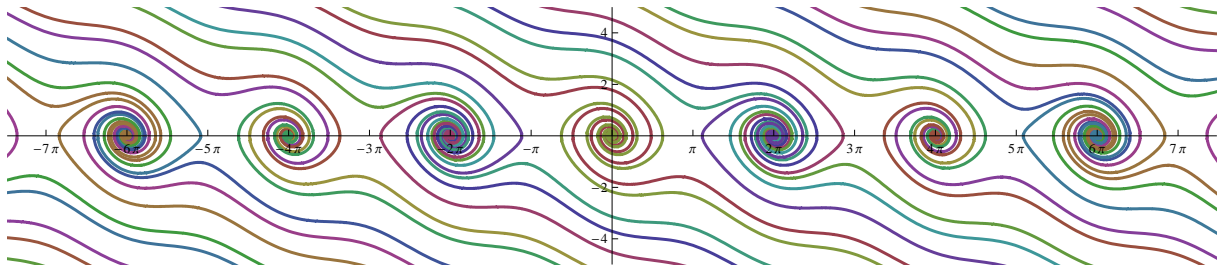
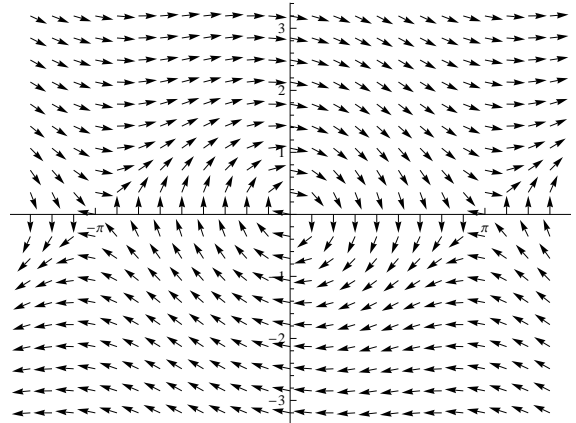
$$\theta''(t) = -c_1 \sin \theta(t) - c_2 \theta'(t).$$

Wir nehmen  $c_1 = 1$  und  $c_2 = \frac{1}{3}$ .

Vernünftige explizite Formeln für die Lösungen gibt es nicht. Man kann das Vektorfeld für das zugehörige System

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ -c_1 \sin \theta(t) - c_2 \psi(t) \end{pmatrix}$$

skizzieren und Trajektorien darstellen wenn man Kurven durch die Vektoren zeichnet. Auch numerische Approximationen lassen sich herstellen und als Trajektorien darstellen:



## 11.2 Differentialgleichung für Trajektorien

Wenn eine Trajektorie  $\{(u(t), u'(t)); t \in (t_-, t_+)\}$  für die Differentialgleichung in (11.1) lokal der Graph einer Funktion ist, hat man diese letzte Funktion als Lösung einer neuen Differentialgleichung. Man setze

$$V(u(t)) = u'(t)$$

und finde

$$f(u(t), u'(t)) = u''(t) = \frac{\partial}{\partial t} (V(u(t))) = V'(u(t)) u'(t).$$

Betrachten wir nun  $u \mapsto V(u)$ , dann folgt

$$f(u, V(u)) = V'(u) V(u).$$

Das heißt, die Funktion  $V$  ist eine Lösung von

$$V'(u) = \frac{f(u, V(u))}{V(u)}. \quad (11.5)$$

Dies gibt uns eine alternative Möglichkeit die Gleichung in (11.1) als System zu schreiben:

$$(1) \quad u''(t) = f(u(t), u'(t))$$

$$(2) \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = f(u(t), u'(t)) \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} V'(u) = \frac{f(u, V(u))}{V(u)} \\ u'(t) = V(u(t)) \end{cases} \quad (11.6)$$

Der Vorteil von (3) ist, dass dieses System zwei Gleichungen erster Ordnung hat, die man nacheinander lösen kann. Der Nachteil ist, dass  $V \neq 0$  gelten soll.

Wenn man eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung hat, die keine erste Ordnungstermen enthält, also

$$u''(t) = f(u) \quad (11.7)$$

dann ist diese Aufspaltung sehr nützlich. Die Differentialgleichung in (11.5) vereinfacht sich zu

$$V'(u) = \frac{f(u)}{V(u)}$$

und diese läßt sich oft explizit lösen. Via  $V'(u)V(u) = f(u)$  findet man

$$\frac{1}{2}V(u)^2 - \frac{1}{2}V(u_0)^2 = \int_{u_0}^u f(s)ds.$$

## 11.3 Feder und Pendel

Einfache Modelle für eine Feder oder ein Pendel haben die Form (11.7). Aus der Physik hat man:

- Kraft gleicht Masse mal Beschleunigung:  $F = m a$ .
- Bei der Schraubenfeder gilt das Hookesche<sup>1</sup> Gesetz: Kraft ist proportional zur Auslenkung

$$F = c u. \quad (11.8)$$

Weil für die Beschleunigung  $a$  gilt, dass  $a = u''$ , folgt

$$u'' = \frac{m}{c}u. \quad (11.9)$$

Für einen Blattfeder ist das Hookesche Gesetz nicht passend. Dann hat man statt (11.8)  $F = f(u)$  wobei  $f$  ein Profil hat wie in Abbildung 11.1 und die Differentialgleichung wird

$$u'' = f(u). \quad (11.10)$$

Für die Pendel betrachtet man statt (11.9) für  $u$  die Auslenkung der Winkel  $\theta$  mit der vertikalen Richtung und findet

$$m \ell \theta'' = c \sin \theta. \quad (11.11)$$

Wir schreiben die Differentialgleichung  $u'' = f(u)$  als System wie in (11.6).

**Lemma 11.3** Sei  $f \in C^1$  und  $(u_0, 0)$  ein Gleichgewichtspunkt für

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ f(u(t)) \end{pmatrix}. \quad (11.12)$$

Dann gilt für die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der Linearisierung in  $(u_0, 0)$ , dass  $\lambda_1 = -\lambda_2$  und  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  oder  $\lambda_1 \in i\mathbb{R}$ . Außerdem:

<sup>1</sup>Robert Hooke (1635-1703) hatte breite wissenschaftliche Interessen. Er hatte eine Professur für Geometrie, formulierte das nach ihm benannte Fundamentalgesetz der Elastizität, baute eine der ersten Taschenuhren und auch einen optischen Telegrafen. Das Bild des Flohs aus seinem *Micrographia* (1665) ist sogar heutzutage noch bekannt. Siehe <http://www.gutenberg.org/files/15491/>.

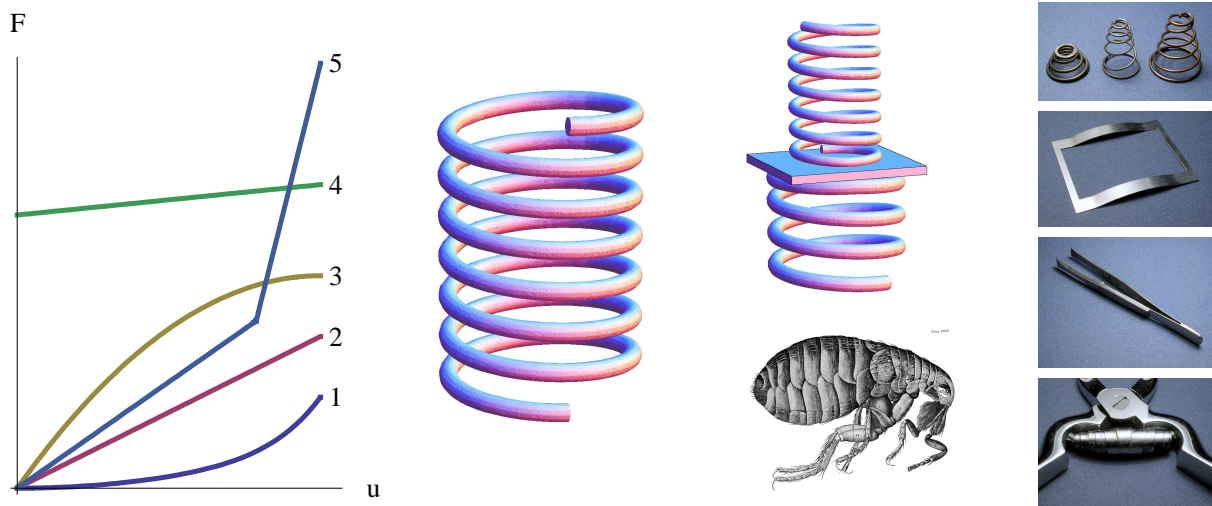


Abbildung 11.1: Aus Wikipedia links einige Federkennlinien als Funktion der Kraft über den Federweg: 1 Progressiv Bsp. Kfz-Blattfeder; 2 linear Bsp. Schraubenfeder; 3 degressiv; 4 näherungsweise konstant Bsp. Kupplungsfeder Auto; 5 nicht glatt z.B. durch auf Block setzen einiger Federteile. Rechts einige Beispiele unterschiedlicher Federn. Der Floh ist von Hooke.

- Wenn  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann ist  $(u_0, 0)$  ein Sattelpunkt für (11.12);
- Wenn  $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann ist  $(u_0, 0)$  neutral stabil für (11.12).

**Bemerkung 11.3.1** Man bemerke, dass  $v_0 = 0$  kein Verlust der Allgemeinheit beinhaltet, denn für einen Gleichgewichtspunkt  $(u_0, v_0)$  von (11.12) gilt  $v_0 = 0$  und  $f(u_0) = 0$ .

**Bemerkung 11.3.2** Mit einem Sattelpunkt ist gemeint, dass es bei  $(u_0, 0)$  eine stabile Richtung und eine instabile Richtung hat im Sinne von Theorem 9.4.

**Bemerkung 11.3.3** Reibungskräfte sind abhängig von der und gegengesetzt zur Geschwindigkeit. Wenn  $u$  die Auslenkung darstellt ist  $u'$  die Geschwindigkeit. Die Differentialgleichung in (11.10) ändert sich in

$$u'' = f(u) - g(u').$$

Hier ist  $g$  eine Funktion, die folgende Bedingung erfüllt:

$$g(s) > 0 \text{ für } s > 0 \text{ und } g(s) < 0 \text{ für } s < 0.$$

**Beweis von Lemma 11.3..** Die Linearisierung ist

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(u_0) & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Eigenwerte gilt  $\lambda^2 = f'(u_0)$  und  $\lambda_1 = -\lambda_2$ .

Wenn  $f'(u_0) > 0$ , dann gilt  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{f'(u_0)} \in \mathbb{R}^+$  und können wir Theorem 9.4 anwenden.

Betrachten wir nun den Fall  $f'(u_0) < 0$ , also  $\lambda_1, \lambda_2 \in i\mathbb{R}$ . Auch gilt für  $f'(u_0) < 0$ , dass  $u \mapsto F(u) := \int_{u_0}^u f(s) ds$  in  $u_0$  ein lokales Maximum hat, denn  $F'(u_0) = f(u_0) = 0$  und  $F''(u_0) = f'(u_0) < 0$ . Dann ist

$$V(u, v) := \frac{1}{2}v^2 - F(u)$$

eine Lyapunov-Funktion:

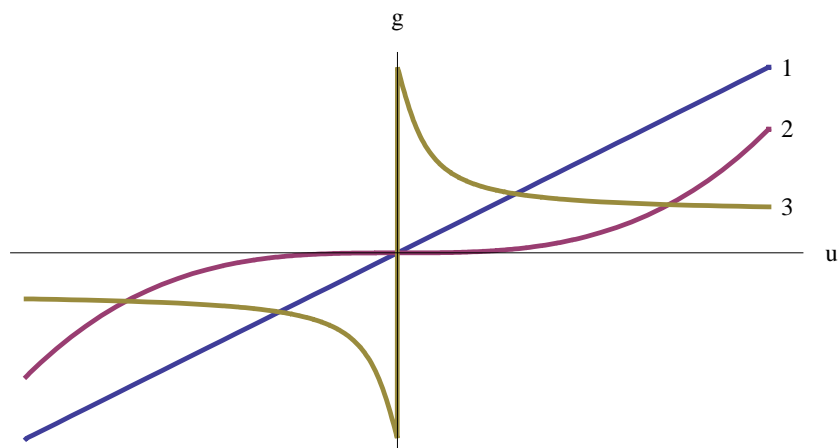


Abbildung 11.2: Reibungskräfte als Funktion der Geschwindigkeit: 1 linear (Coulombsche Reibung); 2 Flüssigkeitsreibung und Gasreibung; 3 Reibung mit Stick-Slip-Effekt.

- $V(u_0, 0) = 0$ ;
- Weil  $f \in C^1$  folgt  $F'' = f' \in C^0$  und gilt

$$\begin{aligned} F(u) &= F(u_0) + f(u_0)(u - u_0) + \frac{1}{2}f'(u_0)(u - u_0)^2 + \mathcal{O}(u - u_0)^2 = \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}f'(u_0)(u - u_0)^2 + \mathcal{O}(u - u_0)^2 \leq \frac{1}{4}f'(u_0)(u - u_0)^2 \end{aligned}$$

für  $u - u_0$  genügend klein. Dann folgt in einer (kleinen) Umgebung von  $(u_0, 0)$ , dass  $V(u, v) > 0$ ;

- Auch gilt:

$$\dot{V}(u, v) = \begin{pmatrix} -f(u) \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ f(u) \end{pmatrix} = 0. \quad (11.13)$$

Theorem 10.7 liefert die Stabilität. Die Tatsache, dass der Punkt nur neutral stabil ist, folgt auch aus (11.13), denn für eine Lösung  $(u(t), v(t))$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} V(u(t), v(t)) = \dot{V}(u(t), v(t)) = 0.$$

Dies bedeutet  $V(u(t), v(t)) = c = V(u(0), v(0))$  und dass für  $(u(0), v(0)) \neq (0, 0)$  die Lösung nicht nach  $(0, 0)$  konvergiert. ■

**Beispiel 11.4** Ein Pendel ohne Reibung hat als Differentialgleichung  $\theta''(t) = -c_1 \sin \theta(t)$ . Wir nehmen  $c_1 = 1$  und betrachten

$$\theta''(t) = -\sin \theta(t).$$

Dies wird wie in (11.6)-(3)

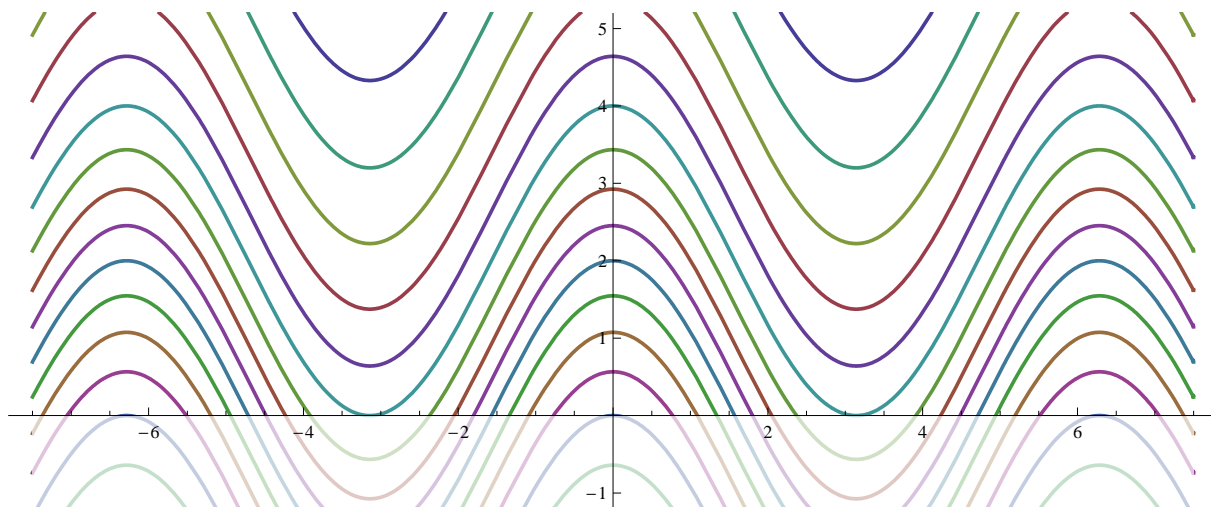
$$V'(\theta) = \frac{-\sin \theta}{V(\theta)}.$$

Man findet via  $V'(\theta)V(\theta) = -\sin \theta$  und  $\frac{1}{2}V(\theta)^2 = c + \cos \theta$ , dass

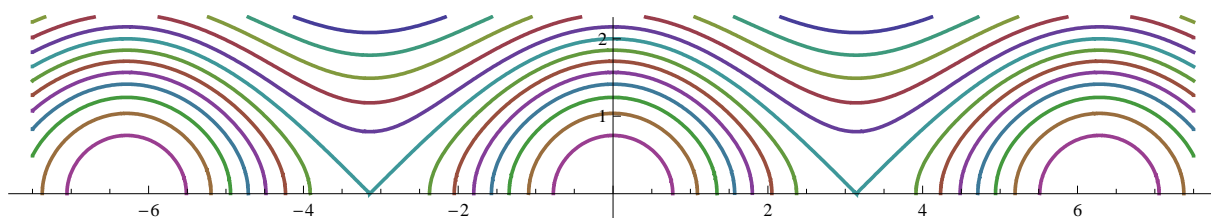
$$V(\theta) = \pm \sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}.$$

In drei Schritten zeichnet man einige Trajektorien.

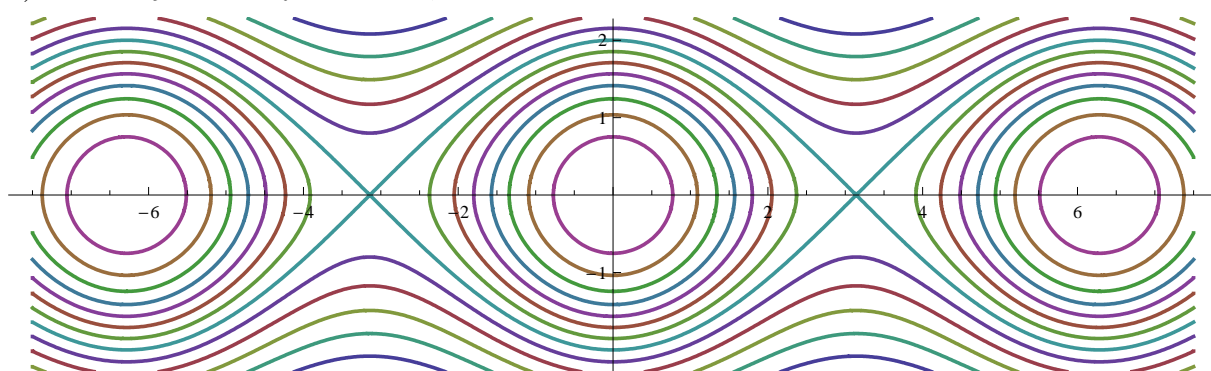
1) Die Funktion  $\theta \mapsto 2 \cos \theta$  und einige vertikale Verschiebungen  $\theta \mapsto \tilde{c} + 2 \cos \theta$ .



2) Man betrachtet nur die Kurven in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  und nimmt die Wurzeln:  $\theta \mapsto \sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}$ .

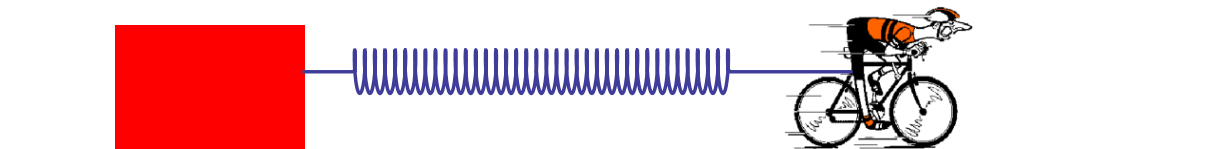


3) Die Trajektorien findet man, wenn man  $\pm \sqrt{\tilde{c} + 2 \cos \theta}$  kombiniert.



**Beispiel 11.5** Zieht man einen Block ( $m = 1$ ) mit Geschwindigkeit  $v = 1$  an einer Schraubfeder (lineare Federkennlinie mit konstante  $c = 1$ ) aus Stillstand ab, dann wird dies modelliert durch das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u''(t) = c(v t - u(t)) - c_w f(u'(t)) \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = 0. \end{cases}$$



Nimmt man  $c_w = 10$  und setzt man für  $f$  Funktionen ein wie in Abbildung 11.2, nämlich

$$f_1(s) = \frac{1}{2}s, \quad f_2(s) = \frac{1}{3}s^3 \text{ und } f_3(s) = \text{sign}(s) \frac{2 - \arctan(15|s|)}{4}, \quad (11.14)$$

so findet man mit Hilfe von numerischen Approximationen die Bilder in Abbildung 11.3. Beim dritten Graphen sieht man den Slip-Stick-Effekt. Wo bei den ersten zwei der Block eine monoton wachsende Geschwindigkeit hat, sieht man im dritten, dass die Geschwindigkeit auf und ab geht. Besser gesagt, der Block schießt erst los wenn genügend gezogen wird, bleibt kurz liegen, schießt wieder los, usw.

Übrigens ist diese Funktion  $f_3$  für  $s \neq 0$  nur eine Möglichkeit wie eine solche Reibung aussehen könnte. Die Haftreibung, die maximale Reibung bei Stillstand, ist größer als die Reibung wenn der Block sich bewegt. Das bedeutet auch, dass die Reibungskraft bei Stillstand nicht festliegt, sondern einen Wert zwischen einer positiven oberen Schranke und einer negativen unteren Schranke annimmt. Schaut man das Anfangswertproblem mit  $f_3$  an, dann sieht man, dass es so auch überhaupt keine Lösung gibt. Es kann nur eine Lösung geben, wenn man den Sprung von  $f_3$  bei 0 auffüllt. Das heißt, sowohl aus physikalischen als auch aus mathematischen Gründen brauchen wir statt  $f_3$  eine mehrwertige Funktion:

$$\bar{f}_3(s) = \begin{cases} \frac{2 - \arctan(15|s|)}{4} & \text{für } s > 0, \\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & \text{für } s = 0, \\ -\frac{2 - \arctan(15|s|)}{4} & \text{für } s < 0. \end{cases}$$

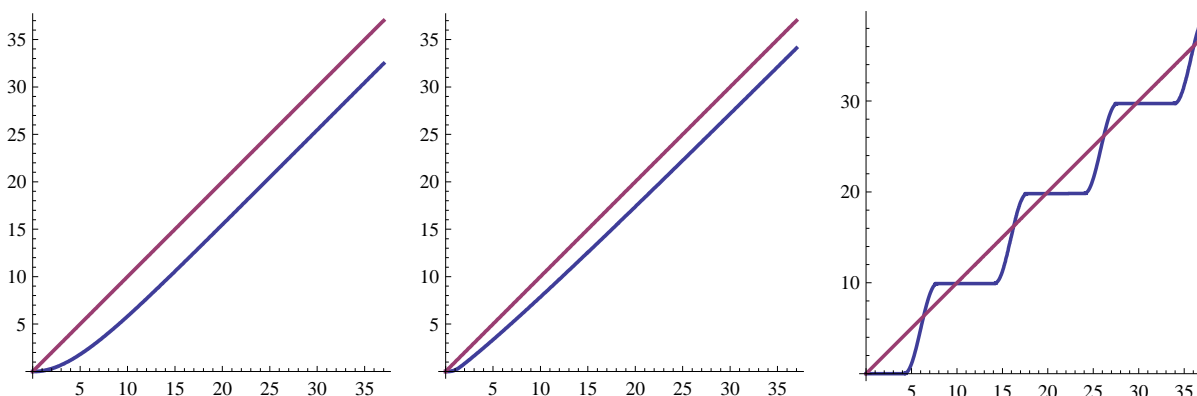
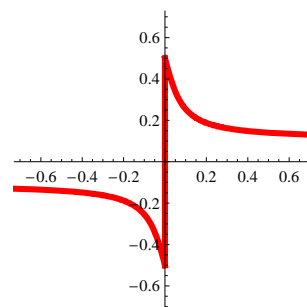


Abbildung 11.3: In rot die Position  $vt$  und in blau  $u(t)$  bei den verschiedenen  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  aus (11.14) und Abbildung 11.2.





# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 12



## Existenz nach Peano

### 12.1 Gleichmäßig und gleichgradig

Kompaktheit in einem endlich dimensionalen Vektorraum ist äquivalent zu „abgeschlossen und beschränkt“. Weil wir die Kompaktheit auch in unendlich dimensionalen Räumen brauchen werden, geben wir nochmals die zugehörigen Definitionen.

**Definition 12.1** • Eine Teilmenge  $K$  von  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$  heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge bezüglich  $\|\cdot\|$  mit Limes in  $K$  besitzt.

- Eine Teilmenge  $K$  von  $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$  heißt überdeckungskompakt, wenn für jede Überdeckung von  $K$  mit offenen Mengen eine Überdeckung schon durch endlich viele dieser Mengen erreicht wird.

Aus dem Satz von Heine-Borel folgt, dass für normierte Vektorräume folgenkompakt und überdeckungskompakt äquivalent sind und man verwendet die Bezeichnung kompakt.

**Definition 12.2** Eine Familie  $\mathcal{F} = \{f_\nu\}_{\nu \in I}$  von Funktionen  $f_\nu : U \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man gleichgradig<sup>1</sup> stetig in  $x \in U$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \forall y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

**Bemerkung 12.2.1** „ $\mathcal{F}$  ist gleichgradig stetig auf  $U$ “ heißt dann:

$$\forall x \in U \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{x,\varepsilon} > 0 \forall y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_{x,\varepsilon} \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Gleichgradig stetig ist eigentlich selten nützlich, wenn man gleichzeitig nicht auch die gleichmäßige Stetigkeit der einzelnen Funktionen hat. „ $\mathcal{F}$  ist gleichgradig gleichmäßig stetig auf  $U$ “ heißt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x, y \in U, \nu \in I : |y - x| < \delta_\varepsilon \implies |f_\nu(y) - f_\nu(x)| < \varepsilon.$$

Man erinnere sich noch an folgendes Ergebnis:

---

<sup>1</sup>Gleichgradig stetig heißt in Englisch *equicontinuous*. Gleichmäßig stetig ist *uniformly continuous*.

**Lemma 12.3** Sei  $K$  kompakt und sei  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist  $f$  gleichmäßig stetig.

Man kann sogar folgendes zeigen.

**Lemma 12.4** Sei  $K$  kompakt und sei  $\{f_\nu : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{\nu \in I}$  gleichgradig stetig. Dann ist  $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$  gleichgradig gleichmäßig stetig.

**Beweis.** Wenn  $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$  gleichgradig stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist, gibt es  $\varepsilon > 0$  und Folgen  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $K$  und  $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $I$  mit  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  und  $|f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(y_n)| \geq \varepsilon$ . Weil  $K$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , sagen wir  $x_{n_k} \rightarrow \tilde{x} \in K$ . Auch gilt dann  $y_{n_k} \rightarrow \tilde{x}$ . Weil  $\{f_\nu\}_{\nu \in I}$  gleichgradig stetig ist in  $\tilde{x}$ , gibt es  $\delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n} > 0$  derart, dass aus  $|x - \tilde{x}| < \delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n}$  folgt  $|f_\nu(x) - f_\nu(\tilde{x})| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Nehmen wir  $n$  so groß, dass  $|x_n - \tilde{x}|, |y_n - \tilde{x}| < \delta_{\frac{1}{2}\varepsilon, n}$  dann hat man wiederum einen Widerspruch:

$$\varepsilon \leq |f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(y_n)| \leq |f_{\nu_n}(x_n) - f_{\nu_n}(\tilde{x})| + |f_{\nu_n}(\tilde{x}) - f_{\nu_n}(y_n)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 12.2 Der Satz von Arzelà-Ascoli

**Theorem 12.5 (Arzelà-Ascoli<sup>2</sup>)** Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Menge und seien  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}$  Funktionen. Wenn  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gleichgradig stetig und beschränkt ist, dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  und  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{n_m}(x)$ , ist stetig auf  $K$ .

**Bemerkung 12.5.1** Die Familie  $\{f_n : K \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt bedeutet: es gibt  $M > 0$  derart, dass  $|f_n(x)| \leq M$  gilt für alle  $x \in K$  und  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis.** Die einzelnen Schritte des Beweises sind die folgenden:

- Existenz einer abzählbaren dichten<sup>3</sup> Teilmenge von  $K$ .** Die Menge der Kugeln  $\mathcal{U}_k := \{B_{2^{-k}}(x); x \in K\}$  ist eine Überdeckung und man kann endlich viele  $\{B_{2^{-k}}(x_{k,\ell})\}_{\ell=1}^{\ell_k}$  wählen, die  $K$  schon überdecken. Die abzählbare Menge  $T := \{x_{k,\ell}; 1 \leq \ell \leq \ell_k, k \in \mathbb{N}\}$  ist dicht in  $K$ .
- Konvergenz auf der dichten Teilmenge.** Wir schreiben  $T =: \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Weil die Folge  $\{f_n(x_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, gibt es wegen des Satzes von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilmenge  $\{f_{n_{1,k}}(x_1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil  $\{f_{n_{1,k}}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilmenge  $\{f_{n_{2,k}}(x_2)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , usw. Also gilt:

$$\begin{aligned} f_{n_{1,1}}, f_{n_{1,2}}, f_{n_{1,3}}, \dots &\text{ konvergiert in } x_1, \\ f_{n_{2,1}}, f_{n_{2,2}}, f_{n_{2,3}}, \dots &\text{ konvergiert in } x_1 \text{ und } x_2, \\ f_{n_{3,1}}, f_{n_{3,2}}, f_{n_{3,3}}, \dots &\text{ konvergiert in } x_1, x_2 \text{ und } x_3, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Nach  $m$  Schritten haben wir eine Teilfolge  $\{f_{n_{m,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ , die konvergiert auf  $\{x_1, \dots, x_m\}$ . Man setze

$$f_{n_k} = f_{n_{k,k}}.$$

Mit Hilfe dieses sogenannten Diagonalverfahrens bekommt man dann eine Teilfolge  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , die konvergiert auf  $T$ . Wir definieren

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) \text{ für } x \in T. \quad (12.1)$$

<sup>2</sup>Cesare Arzelà (1847-1912) und Giulio Ascoli (1843-1896)

<sup>3</sup>Eine Teilmenge  $T \subset K$  heißt dicht, wenn es zu jedem  $x \in K$  eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$  gibt, die nach  $x$  konvergiert.

3. **Konvergenz auf dem Ganzen  $K$ .** Für  $x \in K \setminus T$  gibt es eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in T$  mit  $x_n \rightarrow x$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir zeigen, dass  $\{f(x_n)\}$  eine Cauchy-Folge ist. Sei  $\varepsilon > 0$ . Weil  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gleichgradig gleichmäßig stetig ist, gibt es  $\delta_{\varepsilon/3} > 0$  derart, dass  $|x_n - x_k| < \delta_{\varepsilon/3}$  impliziert  $|f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  unabhängig von  $n_m$ . Man nehme  $m$  derart groß, dass  $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  und  $|f_{n_m}(x_k) - f(x_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Dies ist möglich wegen (12.1). Sei  $N$  so groß, dass  $|x_n - x| < \frac{1}{2}\delta_{\varepsilon/2}$  für  $n > N$ . Dann folgt für  $n, k > N$ , dass  $|x_n - x_k| < \delta_{\varepsilon/3}$  und

$$|f(x_n) - f(x_k)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(x_k)| + |f_{n_m}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Dann ist  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  auch konvergent. Wenn es zwei Folgen  $x_n \rightarrow x$  und  $y_n \rightarrow x$  gibt, dann gilt auch hier

$$|f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(y_n)| + |f_{n_m}(y_n) - f(y_n)|,$$

und man findet ähnlich wie soeben, dass  $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  den gleichen Grenzwert hat. Das bedeutet

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \text{ für } T \ni x_n \rightarrow x \in K \setminus T \quad (12.2)$$

ist wohldefiniert.

4. **Stetigkeit der Grenzfunktion.** Auch gilt, dass  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und deshalb auch gleichmäßig stetig ist: Seien  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  derart, dass  $T \ni x_n \rightarrow \tilde{x}$  und  $T \ni y_n \rightarrow \tilde{y}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Man verwende:

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq |f(\tilde{x}) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| + |f_{n_m}(x_n) - f_{n_m}(y_n)| + |f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(\tilde{y})|.$$

Wenn man  $n$  genügend groß nimmt, folgt  $|x_n - y_n| < 2|\tilde{x} - \tilde{y}|$ . Man nehme  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass  $|x - y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$  impliziert  $|f_{n_m}(x) - f_{n_m}(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ . Auch nehme man  $n$  so groß, dass  $|f(x) - f(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$  und  $|f(y_n) - f(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ . Indem man  $m$  genügend groß nimmt, findet man  $|f(x_n) - f_{n_m}(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$  und  $|f_{n_m}(y_n) - f(y_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$ .

5. **Gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge.** Die gleichmäßige Konvergenz von  $\{f_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  auf  $K$  folgt aus der Kompaktheit von  $K$ : Wenn  $f_{n_m}$  nicht gleichmäßig konvergiert, dann gibt es  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Teilfolge  $n_{m_k}$  mit  $x_k \in K$  und

$$|f_{n_{m_k}}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat eine konvergente Teilfolge, sage  $x_{k_\ell} \rightarrow \tilde{x}$ . Sei  $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T$  eine Folge mit  $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ . Man findet

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &< \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f(x_{k_\ell}) \right| \leq \\ &\leq \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) \right| + \left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n) \right| + |f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite bekommt man so klein wie man möchte und damit einen Widerspruch: Für  $\ell$  und  $n$  genügend groß folgt, dass  $|x_{k_\ell} - \tilde{x}_n|$  genügend klein ist und dann kann man wegen gleichgradiger Stetigkeit  $\left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$  und  $|f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_\ell})| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$  erreichen. Für  $\ell$  genügend groß, hat man schlussendlich auch  $\left| f_{n_{m_{k_\ell}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n) \right| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$ . ■

## 12.3 Ein vereinfachter Existenzsatz

Für den Satz von Picard-Lindelöf hat man das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

umgewandelt in eine Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s)) ds.$$

Weil wir nicht annehmen wollen, dass  $f$  differenzierbar oder Lipschitz-stetig ist und nur Stetigkeit voraussetzen, wird Konvergenz einer approximierenden Folge von Lösungen etwas komplizierter. Eine Konvergenz wie beim Satz von Picard-Lindelöf zu einer eindeutigen Lösung ist sogar unmöglich denn es gibt im Allgemeinen keine eindeutige Lösung.

**Beispiel 12.6** Das Anfangswertproblem  $x'(t) = \sqrt[3]{x(t)}$  mit  $x(0) = 0$  hat mindestens drei Lösungen, nämlich für  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= 0, \\ x(t) &= \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}, \\ x(t) &= -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Man kann sogar kreativ werden und zeigen, dass alle Lösungen dieser Differentialgleichung neben  $x(t) = 0$  wie folgt sind:

$$x(t) = \pm \left(\frac{2}{3} \max(0, t - c)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nimmt man  $c \geq 0$  dann ist sogar der Anfangswert erfüllt.

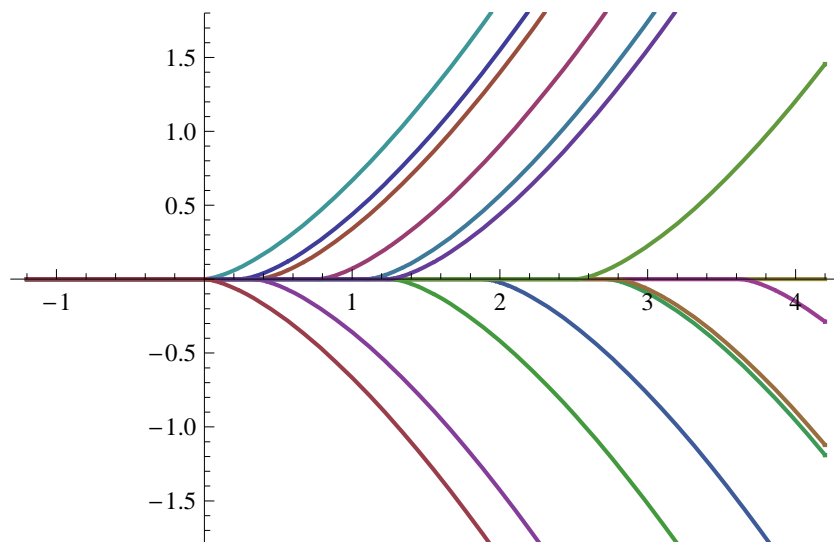


Abbildung 12.1: Einige Lösungen des Anfangswertproblems aus Beispiel 12.6.

Die oben genannte Schwierigkeit kann man überwinden durch Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder oder durch eine besondere Wahl einer approximierenden Folge. Wir folgen diesem zweiten Ansatz, den man auch findet im Buch von Walter [5].

**Proposition 12.7** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und sei  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt. Dann existiert mindestens eine stetig differenzierbare Funktion  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x'(t) = f(t, x(t))$  und  $x(a) = x_0$ .

**Bemerkung 12.7.1** Schaut man den folgenden Beweis genau an, dann sieht man, dass er nicht konstruktiv ist. Man findet die Existenz einer approximierenden Folge, jedoch keine explizite approximierende Folge. Für die meisten konkreten Beispiele kann man zeigen, dass die Folge in (12.3) konvergiert. Im Allgemeinen hat man aber nur die Konvergenz einer Teilfolge.

**Beweis.** Wir definieren für  $n \in \mathbb{N}^+$  die Funktionen

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0, \\ x_n(t) &= x_0 + \int_a^t f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Bemerke, dass  $x_n(t)$  auf  $\left[a, a + \frac{1}{n}\right]$  definiert ist durch

$$x_n(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x_0) ds,$$

und auf  $\left(a + \frac{1}{n}, a + \frac{2}{n}\right]$  durch

$$x_n(t) = x_0 + \int_a^{a+1/n} f(s, x_0) ds + \int_{1/n}^t f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds,$$

wo  $x_n(s - \frac{1}{n})$  schon bekannt ist. Usw. Es bedeutet, dass  $x_n$  eindeutig definiert ist auf  $[a, b]$ . Weil  $f$  beschränkt ist, sagen wir  $|f| \leq M$ , folgt

$$|x_n(t)| \leq |x_0| + M(b - a) =: C$$

und

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} f\left(s, x_n\left(s - \frac{1}{n}\right)\right) ds \right| \leq M |t_1 - t_2|.$$

Also ist  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  beschränkt und gleichgradig stetig auf  $[a, b]$ . Das Theorem von Arzela-Ascoli liefert uns eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ . Nennen wir den Limes  $\hat{x}$ , dann gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| = 0.$$

Weil

$$\begin{aligned} \left| x_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right) - \hat{x}(t) \right| &\leq \left| x_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right) - x_{n_k}(t) \right| + |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| \leq \\ &\leq M \frac{1}{n_k} + |x_{n_k}(t) - \hat{x}(t)| \end{aligned}$$

gilt auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [a, b]} \left| x_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right) - \hat{x}(t) \right| = 0.$$

Weil außerdem  $f$  gleichmäßig stetig ist auf  $[a, b] \times [-C, C]$ , darf man Integral und Grenzwert vertauschen und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( x_0 + \int_a^t f\left(s, x_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) ds \right) \\ &= x_0 + \int_a^t \lim_{k \rightarrow \infty} f\left(s, x_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) ds = \\ &= x_0 + \int_a^t f\left(s, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\left(s - \frac{1}{n_k}\right)\right) ds = x_0 + \int_a^t f(s, \hat{x}(s)) ds. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von  $\hat{x}$  und  $f$  zeigt, dass  $s \mapsto f(s, \hat{x}(s))$  stetig und dass  $t \mapsto \int_a^t f(s, \hat{x}(s)) ds$  stetig differenzierbar ist. Dann ist auch  $\hat{x}$  stetig differenzierbar und  $\hat{x}$  erfüllt das Anfangswertproblem. ■

Eine Bedingung, die wir noch los werden möchten, ist die Beschränktheit von  $f$  auf  $[a, b] \times \mathbb{R}$ .

## 12.4 Existenz nach Peano

**Theorem 12.8** Nehmen wir  $R = [a, b] \times [c, d]$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Sei  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sei  $a < t_0 < b$  und  $c < x_0 < d$ .

1. Dann hat

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (12.4)$$

mindestens eine Lösung  $x : [t_-, t_+] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $t_- < t_0 < t_+$ .

2. Jede Lösung von (12.4) kann fortgesetzt werden bis auf den Rand von  $[a, b] \times [c, d]$ . Das heißt, wenn  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung ist mit  $(t_-, t_+)$  maximal, dann ist  $x : [t_-, t_+] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung und es gilt:

- $t_- = a$  oder  $x(t_-) = c$  oder  $x(t_-) = d$ ;
- $t_+ = b$  oder  $x(t_+) = c$  oder  $x(t_+) = d$ .

**Bemerkung 12.8.1** Dieses Ergebnis lässt sich auch übertragen auf das Anfangswertproblem für Systeme von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{f}(t, \vec{x}(t)) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (12.5)$$

**Beweis.** 1. Wir definieren  $\tilde{f} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{cases} f(t, c) & \text{für } x < c, \\ f(t, x) & \text{für } c \leq x \leq d, \\ f(t, d) & \text{für } d < x. \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{f}$  stetig und beschränkt auf dem Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}$  und wir können Proposition 12.7 verwenden. Wir finden eine Lösung  $\tilde{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  von

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (12.6)$$

Setzen wir  $M := \max \{|f(t, x)|; (t, x) \in R\}$  so folgt  $|\tilde{f}(t, \tilde{x}(t))| \leq M$  und

$$|\tilde{x}(t) - x_0| \leq M(t - t_0).$$

So lange  $c \leq x_0 \pm M(t - t_0) \leq d$  gilt, also für

$$|t - t_0| \leq \frac{1}{M} \min(d - x_0, x_0 - c), \quad (12.7)$$

gilt  $\tilde{x}(t) \in [c, d]$  und auch  $\tilde{f}(t, x(t)) = f(t, x(t))$ . So ist  $\tilde{x}$  eine Lösung von (12.4) für  $t$  wie in (12.7).

2. Wenn  $x : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung ist, dann kann man wie im Beweis von Theorem 7.1 zeigen, dass  $\lim_{t \downarrow t_-} x(t_-)$  und  $\lim_{t \uparrow t_+} x(t_+)$  existieren. Dies bedeutet, dass die Lösung erweiterbar ist auf  $[t_-, t_+]$ . Auch kann man, wie im Beweis von Theorem 7.1, zeigen, dass wenn  $(t_-, x(t_-)) \in R^o$  oder wenn  $(t_+, x(t_+)) \in R^o$  ein neues Randwertproblem lösen kann, welche Lösung die jetzige Lösung  $x$  fortsetzen kann. Dieser Teil des Beweises von Theorem 7.1 braucht nur die gleichmäßige Stetigkeit von  $f$  und nicht die Lipschitz-Bedingung. ■

**Beispiel 12.9** Dieses Beispiel kommt aus dem Buch von Walter [5] und zeigt wieso wir beim Beweis von Proposition 12.7 nicht die Approximationsfolge von Picard-Lindelöf verwenden können. Betrachte

$$\begin{cases} x'(t) = 2t - 2\sqrt{\max(x(t), 0)} \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (12.8)$$

Wenn wir die Picard-Iteration verwenden: Für

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

ist die

$$x_0(t) = x(t_0) \text{ und } x_{n+1}(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds,$$

folgt

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0, \\ x_1(t) &= \int_0^t 2s ds = t^2, \\ x_2(t) &= \int_0^t (2s - 2\sqrt{s^2}) ds = 0, \\ x_3(t) &= \int_0^t 2s ds = t^2, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Man findet  $x_{2n}(t) = 0$  und  $x_{2n+1}(t) = t^2$ . Die Funktionenfolge konvergiert nicht. Man kann konvergente Teilfolgen nehmen und würde zwei Grenzfunktionen finden:

$$x_{\infty,1}(t) = t^2 \text{ und } x_{\infty,2}(t) = 0.$$

Man zeigt sofort, dass diese Funktionen beide keine Lösung geben.

Das Theorem von Peano gibt uns trotzdem die Existenz von mindestens einer Lösung. Wenn man  $x(t) = ct^2$  versucht mit  $c \geq 0$ , dann findet man für  $t \geq 0$ , dass

$$x'(t) = 2ct \text{ und } 2t - 2\sqrt{\max(x(t), 0)} = 2(1 - \sqrt{c})t.$$

Löst man  $c = 1 - \sqrt{c}$ , dann folgt für  $t \geq 0$  die Lösung

$$x(t) = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) t^2.$$

Auf ähnlicher Art findet man eine Formel für eine Lösung auf  $(-\infty, 0]$ . Man kann beide Formeln kombinieren zu einer Lösung auf  $\mathbb{R}$ :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) t^2 & \text{für } t \geq 0, \\ \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) t^2 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Man kann sogar zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Erstens soll man bemerken, dass eine Lösung nicht negativ werden kann. Denn wenn  $x(t) < 0$  auf  $(t_1, t_2)$  mit  $0 \leq t_1 < t_2$ , dann gilt  $x'(t) = 2t$  und ist  $x$  streng monoton wachsend und das passt nicht zu  $x(0) = 0$ . Nehmen wir an es gibt zwei positive Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  mit  $x_1(t_1) = x_2(t_1)$  und  $x_1(t) > x_2(t)$  auf  $(t_1, t_2)$ . Weil  $x \mapsto f(t, x) = 2t - 2\sqrt{\max(x, 0)}$  streng fallend ist für  $x > 0$ , gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1(t_2) - x_2(t_2) = \\ &= x_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_1(s)) ds - x_2(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f(s, x_2(s)) ds = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds < 0, \end{aligned}$$

einen Widerspruch.

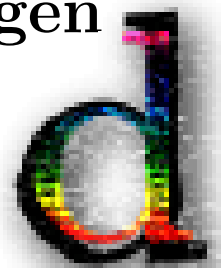
Wenn aus der Vorlesung Funktionalanalysis der Fixpunktsatz von Schauder bekannt ist, wird der Beweis des Theorems von Peano viel einfacher. Vollständigkeitshalber bringen wir diesen Satz.

**Theorem 12.10 (Fixpunktsatz von Schauder)** Sei  $D$  eine abgeschlossene konvexe Menge eines Banachraumes  $B$  und sei  $T : D \rightarrow B$  ein stetiger und kompakter Operator mit  $T(D) \subset D$ . Dann hat  $T$  mindestens einen Fixpunkt in  $D$ .



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 13



## Randwertprobleme

### 13.1 Beispiele

Wirft man einen Schneeball so setzt man einen Anfangswert für Position und Geschwindigkeit und man möchte eine bestimmte Stelle in einiger Entfernung treffen. Das bedeutet, man möchte zwei Anfangswerte und einen Endwert festlegen. Vereinfacht man die Reibungskräfte bei der Bewegung durch die Luft indem man sie linear ansetzt, dann kann man noch einiges explizit berechnen. So bald aber nicht-lineare Termen erscheinen, kann man meistens explizite Lösungsformeln vergessen. Als Grundregel kann man sich aber merken, dass generisch folgendes gilt: eine Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung braucht  $n$  unabhängige Bedingungen um höchstens eine Lösung zu haben. Eine Bedingung für die Existenz von mindestens einer Lösung kann man so allgemein nicht geben.

**Beispiel 13.1** *Wir betrachten*

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = e^t, \\ u(0) = 0 \text{ und } u(T) = 0. \end{cases}$$

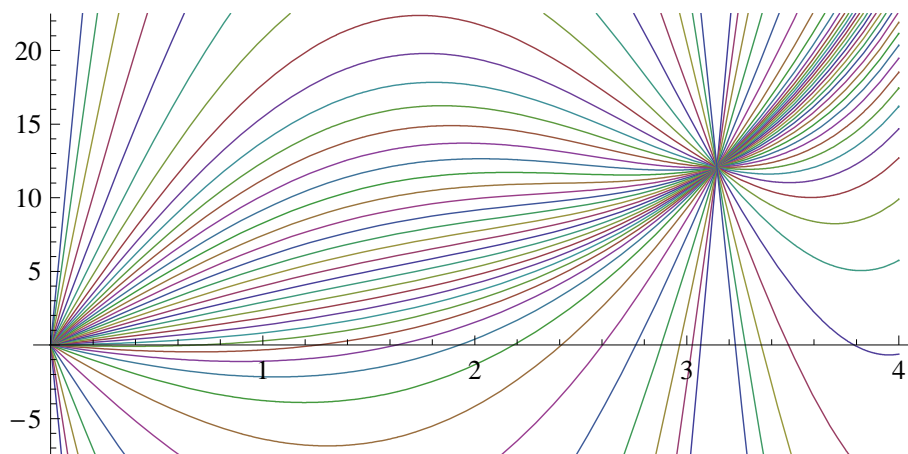
*Weil die Differentialgleichung linear ist mit konstanten Termen, kann man alle Lösungen explizit berechnen:*

$$u(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t.$$

*Die Randbedingungen geben*

$$\begin{aligned} 0 = u(0) = c_2 + \frac{1}{2} &\implies c_2 = -\frac{1}{2}, \\ 0 = u(T) = c_1 \sin T - \frac{1}{2} \cos T + \frac{1}{2}e^T &\implies c_1 = \frac{\cos T - e^T}{2 \sin T}. \end{aligned}$$

*Das letzte gibt ein Problem wenn  $T = k\pi$  für  $k \in \mathbb{N}^+$ . Dann gibt es keine Lösung. Jede Lösung  $u$  der Differentialgleichung mit  $u(0) = 0$  erfüllt die Bedingung  $u(\pi) = \frac{1}{2}(e^\pi - 1)$ . Siehe die nächste Abbildung.*



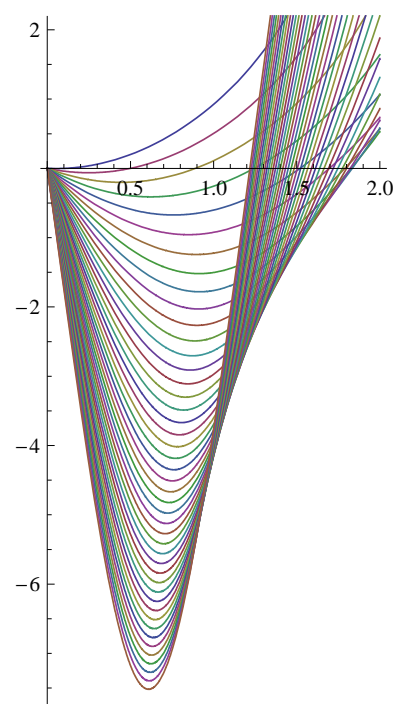
**Beispiel 13.2** *Lösungen für das nicht-lineare Randwertproblem*

$$\begin{cases} v''(t) = 2 + v(t)^2, \\ v(0) = 0 \text{ und } v(T) = 0 \end{cases}$$

kann man nicht nur nicht mehr durch eine Formel darstellen sondern für  $T > 1.85\dots$  gibt es sie überhaupt nicht mehr. Leicht lässt sich diese Behauptung nicht beweisen. Betrachtet man die numerisch approximierten Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} v''(t) = 2 + v(t)^2, \\ v(0) = 0 \text{ und } v'(0) = \alpha \end{cases}$$

dann ist diese Behauptung glaubwürdig. Die Nicht-linearität sorgt dafür, dass  $v''$  sehr gross wird, wenn  $v$  groß wird. Das führt dazu, dass für  $\alpha$  sehr negativ, die Lösung, nachdem sie hinuntergeschossen wurde, sogar besonders schnell wieder hochklettert.



Mit diesen beiden Beispielen sollte es klar sein, dass man für Randwertprobleme nicht einen so allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz formulieren kann wie für Anfangswertprobleme. Wir werden uns fast immer beschränken auf Randwertprobleme für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

## 13.2 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Die allgemeine Version eines solchen Randwertproblems ist

$$\begin{cases} u''(x) + r(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \text{ für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) + \alpha_3 u(b) + \alpha_4 u'(b) = \eta, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) + \beta_3 u(a) + \beta_4 u'(a) = \xi. \end{cases} \quad (13.1)$$

Präzise gesagt: die Funktionen  $f, q, r : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  sind vorgegeben wie auch die Konstanten  $\alpha_i, \beta_i$  für  $i = 1, \dots, 4$  und  $\eta, \xi$ . Die Funktion  $u$  wird gesucht. Spezifische Randwertbedingungen sind:

- **Dirichlet:**  $u(a) = \eta$  und  $u(b) = \xi$ .
- **Neumann:**  $u'(a) = \eta$  und  $u'(b) = \xi$ .
- **Robin:**  $\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta$  und  $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \xi$  mit  $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$  und  $\beta_1 \beta_2 \neq 0$ .
- **Periodische:**  $u(a) - u(b) = 0$  und  $u'(a) - u'(b) = 0$ .

Oft werden nur homogene Randwerte betrachtet. Das heißt, man setzt  $\eta = \xi = 0$ . Das solches kaum einen Verlust der Allgemeinheit bedeutet, sieht man wie folgt. Man nehme eine beliebige zweimal differenzierbare Funktion  $w$  mit der einzigen Einschränkung, dass  $w$  beide Randbedingungen erfüllen sollte:

$$\begin{aligned}\alpha_1 w(a) + \alpha_2 w'(a) + \alpha_3 w(b) + \alpha_4 w'(b) &= \eta, \\ \beta_1 w(b) + \beta_2 w'(b) + \beta_3 w(a) + \beta_4 w'(a) &= \xi.\end{aligned}$$

Setzt man nun  $\tilde{u} = u - w$ , dann hat man statt (13.1) das folgende Randwertproblem bekommen:

$$\begin{cases} \tilde{u}''(x) + r(x)\tilde{u}'(x) + q(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x) \text{ für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 \tilde{u}(a) + \alpha_2 \tilde{u}'(a) + \alpha_3 \tilde{u}(b) + \alpha_4 \tilde{u}'(b) = 0, \\ \beta_1 \tilde{u}(b) + \beta_2 \tilde{u}'(b) + \beta_3 \tilde{u}(a) + \beta_4 \tilde{u}'(a) = 0, \end{cases} \quad (13.2)$$

mit

$$\tilde{f}(x) = f(x) - w''(x) - r(x)w'(x) - q(x)w(x).$$

### 13.3 Sturmsche Randwertaufgaben

Jacques Charles François Sturm (1803-1855) hat sich den folgenden Typ genauer angeschaut:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = f(x) \text{ für } x \in (a, b), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = \eta, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = \xi. \end{cases} \quad (13.3)$$

mit den folgenden Annahmen.

#### Bedingung 13.3 (Für das Sturmsche Randwertproblem)

- $q \in C[a, b]$ ,
- $p \in C^1[a, b]$  ist positiv:  $p(x) > 0$  für  $x \in [a, b]$ ,
- $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$  und  $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ .

Die Aufgabe ist:

Für  $f \in C[a, b]$  und  $\eta, \xi \in \mathbb{R}$  suche man eine Lösung  $u \in C^2[a, b]$ .

Die Sturmsche Randwertaufgabe (13.3) enthält Problem (13.1) für die ersten drei Typen von Randwerten. Denn es gilt

$$\frac{1}{p(x)} \frac{d}{dx} (p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = u''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}u'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}u(x)$$

und wenn man  $\frac{p'(x)}{p(x)} = r(x)$  und  $\frac{q(x)}{p(x)} = \tilde{q}(x)$  löst, sind beide Differentialgleichungen ineinander zu überführen. Man kann diese beiden letzten Gleichungen lösen durch

$$p(x) = e^{\int_0^x r(s)ds} \text{ und } q(x) = \tilde{q}(x)e^{\int_0^x r(s)ds}.$$

Den Vorteil der Schreibweise in (13.3) wird man später sehen.

Definiert man den Differentialoperator  $L : C^2[a, b] \rightarrow C[a, b]$  durch

$$(Lu)(x) = \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x), \quad (13.4)$$

dann findet man die folgende Identität.

**Lemma 13.4 (Lagrange-Identität)** Sei  $L$  wie in (13.4). Dann folgt

$$vLu - uLv = (p(u'v - uv'))'. \quad (13.5)$$

Dieses Ergebnis lässt sich leicht kontrollieren. Wenn  $Lu = 0$  und  $Lv = 0$  gilt, folgt, dass die Funktion  $x \mapsto p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))$  konstant ist.

Wir definieren auch die Randoperatoren  $R_\ell : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $R_r : C^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\begin{aligned} R_\ell u &= \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a), \\ R_r u &= \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b). \end{aligned} \quad (13.6)$$

**Theorem 13.5 (Eindeutigkeit)** Sei  $L$  definiert in (13.4) mit  $p \in C^1[a, b]$  positiv und  $q \in C[a, b]$ . Wenn  $\{u_1, u_2\}$  zwei unabhängige Lösungen von  $Lu = 0$  sind und

$$\det \begin{pmatrix} R_\ell u_1 & R_\ell u_2 \\ R_r u_1 & R_r u_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (13.7)$$

dann hat (13.3) für jedes  $f \in C[a, b]$  und  $\eta, \xi \in \mathbb{R}$  höchstens eine Lösung  $u \in C^2[a, b]$ .

**Bemerkung 13.5.1** Der Differentialoperator  $L$  ist linear von Ordnung zwei. Das bedeutet, dass  $Lu = 0$  zwei unabhängige<sup>1</sup> Lösungen  $u_1, u_2$  hat. Man nennt  $\{u_1, u_2\}$  ein Fundamentalsystem für  $Lu = 0$ . Für jede Lösung  $u$  von  $Lu = 0$  gibt es zwei Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) \text{ für } x \in [a, b].$$

**Beweis.** Sei  $u^* \in C^2[a, b]$  eine solche Lösung. Die allgemeine Lösung von  $Lu = f$  kann man dann schreiben als

$$u(x) = u^*(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Wenn diese Funktion das Randwertproblem löst, dann folgt, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_\ell u \\ R_r u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\ell u^* + c_1 R_\ell u_1 + c_2 R_\ell u_2 \\ R_r u^* + c_1 R_r u_1 + c_2 R_r u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_\ell u^* \\ R_r u^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\ell u_1 & R_\ell u_2 \\ R_r u_1 & R_r u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\ell u_1 & R_\ell u_2 \\ R_r u_1 & R_r u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weil (13.7) gilt, folgt  $c_1 = c_2 = 0$ . ■

<sup>1</sup>Die Funktionenmenge  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  heißt unabhängig, wenn aus  $\sum_{i=1}^m c_i u_i(x) = 0$  folgt  $c_i = 0$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

## 13.4 Greensche Funktion für die Sturmsche Randwertaufgabe

**Theorem 13.6 (Existenz)** Sei  $L$  definiert in (13.4) mit  $p \in C^1[a, b]$  positiv und  $q \in C[a, b]$  und sei  $R_\ell, R_r$  definiert in (13.6). Sei  $u_\ell$ , beziehungsweise  $u_r$ , eine nicht-triviale Lösung von

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } (a, b), \\ R_\ell u = 0, \end{cases} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{cases} Lu = 0 \text{ in } (a, b), \\ R_r u = 0. \end{cases} \quad (13.8)$$

Wenn  $\{u_r, u_\ell\}$  unabhängig sind, ist

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{u_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} & \text{für } a \leq x \leq y \leq b, \\ \frac{u_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} & \text{für } a \leq y < x \leq b. \end{cases} \quad (13.9)$$

mit  $W(y) = u_\ell(y)u'_r(y) - u'_\ell(y)u_r(y)$  wohldefiniert und ist

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy \quad (13.10)$$

mit  $f \in C[a, b]$  eine Lösung von

$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } (a, b), \\ R_\ell u = 0 \text{ und } R_r u = 0. \end{cases} \quad (13.11)$$

**Bemerkung 13.6.1** Die Funktion  $G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  heißt die Greensche Funktion für (13.11).

**Bemerkung 13.6.2** Diese Methode kann man erweitern für allgemeinere lineare Randwertprobleme. Die Funktion  $y \mapsto p(y)W(y)$  ist konstant für die Sturmsche Randwertaufgabe wegen (13.5).

**Beweis.** Die Funktionen  $u_r$  und  $u_\ell$  kann man finden als Lösung eines Anfangswertproblems. Zum Beispiel sei  $u_\ell$  die Lösung von

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha_2 \text{ und } u'(a) = -\alpha_1. \end{cases} \quad (13.12)$$

Dieses Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung  $u_\ell$  und es gilt

$$R_\ell u_\ell = \alpha_1 u_\ell(a) + \alpha_2 u'_\ell(a) = 0.$$

Weil  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$  ist  $u_\ell$  nicht trivial.

Weil angenommen ist, dass  $\{u_r, u_\ell\}$  unabhängig ist, ist für jedes  $y \in [a, b]$  und jede  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  die Lösung vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) + q(x)u(x) = 0 \text{ für } x \in (a, b), \\ u(y) = c_1 \text{ und } u'(y) = c_2, \end{cases} \quad (13.13)$$

zu schreiben als  $u_y(x) = \gamma_1 u_\ell(x) + \gamma_2 u_r(x)$ . Das heißt, das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_\ell(y) & u_r(y) \\ u'_\ell(y) & u'_r(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 u_\ell(y) + \gamma_2 u_r(y) \\ \gamma_1 u'_\ell(y) + \gamma_2 u'_r(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

kann man für jede  $\gamma_1, \gamma_2$  lösen. Es folgt, dass  $u'_\ell(y)u_r(y) - u_\ell(y)u'_r(y) \neq 0$  gilt für alle  $y$ .

Weil zusätzlich gilt, dass

$$\lim_{y \downarrow x} G(x, y) = \lim_{y \uparrow x} G(x, y),$$

ist die Greensche Funktion sogar stetig auf  $[a, b]^2$ .

Dass man nun tatsächlich eine Lösung des Randwertproblems findet, folgt durch direktes Rechnen. Das ist zwar nicht besonders elegant aber sehr effektiv. Man hat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_a^b G(x, y) f(y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left( \int_a^x \frac{u_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \int_x^b \frac{u_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy \right) \\ &= u'_r(x) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + u_r(x) \frac{u_\ell(x)}{p(x)W(x)} f(x) + u'_\ell(x) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy - u_\ell(x) \frac{u_r(x)}{p(x)W(x)} f(x) \\ &= \int_a^x \frac{u'_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \int_x^b \frac{u'_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} L \left( \int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right) (x) &= \\ &= \frac{d}{dx} \left( p(x) \int_a^x \frac{u'_r(x)u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy \right) + \frac{d}{dx} \left( p(x) \int_x^b \frac{u'_\ell(x)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy \right) + q(x) \int_a^b G(x, y) f(y) dy \\ &= \left( (p(x)u'_r(x))' + q(x)u_r(x) \right) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + p(x)u'_r(x) \frac{u_\ell(x)}{p(x)W(x)} f(x) + \\ &\quad + \left( (p(x)u'_\ell(x))' + q(x)u_\ell(x) \right) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy - p(x)u'_\ell(x) \frac{u_r(x)}{p(x)W(x)} f(x) \\ &= (Lu_r)(x) \int_a^x \frac{u_\ell(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + (Lu_\ell)(x) \int_x^b \frac{u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \frac{p(x)(u_\ell(x)u'_r(x) - u'_\ell(x)u_r(x))}{p(x)W(x)} f(x) = \\ &= 0 + 0 + f(x). \end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind erfüllt:

$$\begin{aligned} R_\ell \left( \int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right) &= \alpha_1 \int_a^b \frac{u_\ell(a)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy + \alpha_2 \int_a^b \frac{u'_\ell(a)u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy \\ &= (\alpha_1 u_\ell(a) + \alpha_2 u'_\ell(a)) \int_a^b \frac{u_r(y)}{p(y)W(y)} f(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für  $R_r \left( \int_a^b G(\cdot, y) f(y) dy \right)$ . ■

**Beispiel 13.7** Wir betrachten

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (13.14)$$

Man nehme  $u_\ell(x) = 1 + x$  und  $u_r(x) = 1 - x$ . Diese Funktionen sind nicht trivial, erfüllen die homogene Differentialgleichung und die zugehörige Randbedingung. Es folgt

$$W(x) = u_\ell(x)u'_r(x) - u'_\ell(x)u_r(x) = (1+x) \cdot -1 - (1-x) \cdot 1 = -2$$

und die Greensche Funktion wird

$$G(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1+x)(1-y) & \text{für } -1 \leq x \leq y \leq 1, \\ -\frac{1}{2}(1-x)(1+y) & \text{für } -1 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (13.15)$$

Man „sieht“ diese Greensche Funktion wenn man Wäsche aufhängt. Die Gewichtsichte  $f$  ist durch die Wäscheklammer an einem Punkt  $y$  konzentriert und die „Lösung“ ist die Funktion  $x \mapsto G(x, y)$ .

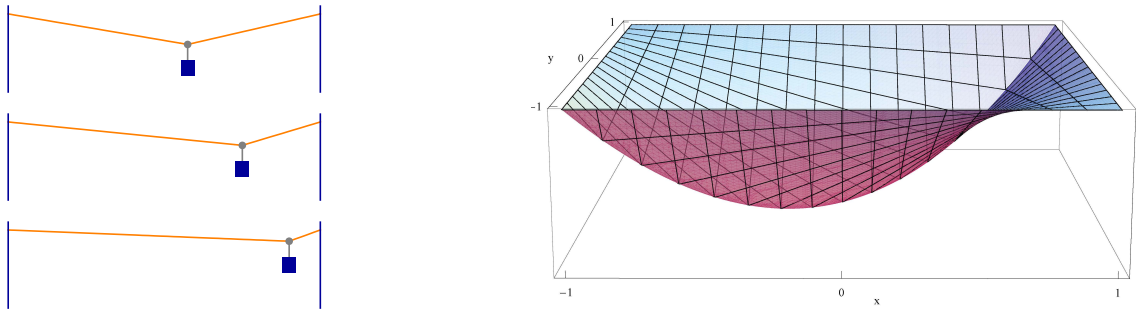


Abbildung 13.1: Die Greensche Funktion für Beispiel 13.7 als Wäscheleine. Links  $x \mapsto G(x, y)$  für drei verschiedene  $y$  und rechts  $(x, y) \mapsto G(x, y)$ .

**Beispiel 13.8** Wir betrachten nochmals

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Versuchen wir zu Fuß eine Lösung zu finden: Integrieren liefert:

$$u'(x) = c_1 + \int_{-1}^x f(s) ds,$$

$$u(x) = c_1 x + c_2 + \int_{-1}^x \left( \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt.$$

Die Randbedingungen sind erfüllt, wenn

$$0 = -c_1 + c_2 \text{ und } c_1 + c_2 + \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt = 0.$$

Man berechnet  $c_1$  und  $c_2$  und findet, dass die Lösung wie folgt ist:

$$u(x) = -\frac{1}{2}(1+x) \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt + \int_{-1}^x \left( \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt.$$

Diese Formel kann man vereinfachen mit partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \left( \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt &= \int_{-1}^x \frac{\partial}{\partial t} \left( (t-x) \int_{-1}^t f(s) ds \right) dt - \int_{-1}^x (t-x) f(t) dt = \\ &= \int_{-1}^x (x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}(1+x) \int_{-1}^1 (1-t) f(t) dt + \int_{-1}^x (x-t) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^x \left( -\frac{1}{2}(1+x)(1-t) + (x-t) \right) f(t) dt + \int_x^1 -\frac{1}{2}(1+x)(1-t) f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 G(x,t) f(t) dt \end{aligned}$$

mit  $G(x,t)$  als in (13.15).

## 13.5 Regularität

Die dritte Bedingung von Hadamard für ein wohldefiniertes Problem ist, dass die Lösung stetig vom Problem abhängt. Das heißt, ändert man das Problem ein wenig, ändert sich auch die Lösung nur wenig. Für eine genaue Formulierung brauchen wir die passenden Funktionenräume.

Die stetigen Funktionen  $C[a,b]$  werden mit  $\|\cdot\|_\infty$ , definiert durch

$$\|f\|_\infty = \max \{ |f(x)| ; x \in [a,b] \}$$

ein normierter Vektorraum  $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ . Der normierte Vektorraum  $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$  ist sogar ein Banachraum: Cauchy-Folgen sind konvergent. Übrigens schreibt man oft statt  $\|\cdot\|_\infty$  auch  $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}^+$ . Die Funktionenmenge  $C^k[a,b]$  wird ein Banachraum, wenn man die Norm  $\|\cdot\|_{C^k[a,b]}$ , definiert durch

$$\|f\|_{C^k[a,b]} = \sum_{m=0}^k \|f^{(m)}\|_{C[a,b]}$$

verwendet.

Mit Hilfe der Greenschen Funktion  $G$  aus (13.9) kann man den Greenschen Operator  $\mathcal{G} : C[a,b] \rightarrow C^2[a,b]$  definieren:

$$(\mathcal{G}f)(x) := \int_a^b G(x,y) f(y) dy \text{ für } f \in C[a,b].$$

Das nächste Ergebnis zeigt, dass dieser Lösungsoperator  $\mathcal{G}$  sogar beschränkt ist.

**Theorem 13.9 (Regularität)** Sei  $L$ ,  $R_r$  und  $R_\ell$  wie in Theorem 13.6. Dann gibt es  $C > 0$  derart, dass folgendes gilt. Sei  $f \in C[a,b]$ . Für die Lösung  $u = \mathcal{G}f$  von

$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } (a,b), \\ R_\ell u = 0 \text{ und } R_r u = 0, \end{cases} \quad (13.16)$$

folgt

$$\|u\|_{C^2[a,b]} \leq C \|f\|_{C[a,b]}.$$

**Bemerkung 13.9.1** Weil (13.16) linear ist gilt für  $f_1, f_2 \in C[a,b]$  und die zugehörigen Lösungen  $u_1, u_2$ , dass

$$\|u_1 - u_2\|_{C^2[a,b]} \leq C \|f_1 - f_2\|_{C[a,b]}.$$

Dies gibt die Stetigkeit der Lösung bezüglich  $f$ .



**Beweis.** Dieses Resultat folgt direkt aus (13.10) und dem Beweis von Theorem 13.6:

$$\begin{aligned}
 |u(x)| &\leq \int_a^b |G(x, y) f(y)| dy \leq \int_a^b |G(x, y)| dy \|f\|_\infty \leq c_0 \|f\|_\infty, \\
 |u'(x)| &\leq \left| \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b G(x, y) f(y) dy \right| \leq \left| \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) f(y) dy \right| \leq \\
 &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \right| dy \|f\|_\infty \leq c_1 \|f\|_\infty, \\
 |u''(x)| &\leq \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \int_a^b G(x, y) f(y) dy \right| = \left| \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 G(x, y) f(y) dy + \frac{1}{p(x)} f(x) \right| \leq \\
 &\leq \left( \int_a^b \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 G(x, y) \right| dy + \frac{1}{p(x)} \right) \|f\|_\infty \leq (c_2 + c_p) \|f\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Man achte darauf, dass die Ableitungen von  $G(x, y)$  für  $x = y$  nicht existieren, und dass die Integrale da uneigentlich sind. Außerhalb existieren die Ableitungen und sind sogar beschränkt. Die Konstanten  $c_i$  gibt es also und man nehme  $C = c_0 + c_1 + c_2 + c_p$ . ■

## 13.6 Greensche Funktionen für allgemeine Randwertaufgaben

Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} Lu = f \text{ in } (a, b), \\ Ru = 0, \end{cases} \quad (13.17)$$

wo  $L$  ein linearer Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung ist:

$$(Lu)(x) = a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0(x)u(x) \quad (13.18)$$

mit  $a_k \in C[a, b]$  und  $a_n(x) > 0$ , und wo  $R = (R_1, \dots, R_n)$  lineare Randoperatoren sind:

$$R_i u = R_i^\ell u + R_i^r u := \sum_{k=0}^{n-1} c_{a,i,k} u^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} c_{b,i,k} u^{(k)}(b). \quad (13.19)$$

Wenn

$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ in } (a, b), \\ Ru = 0, \end{cases} \quad (13.20)$$

nur die triviale Lösung hat, dann kann man eine Greensche Funktion konstruieren.

**Algorithmus 13.10** Für  $y \in (a, b)$  berechne man die vom Parameter  $y$  abhängige Funktion  $x \mapsto g_y(x)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $Lg_y(x) = 0$  für  $x \neq y$ ,
2.  $Rg_y = 0$ ,
3.  $\lim_{x \uparrow y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k g_y(x) - \lim_{x \downarrow y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k g_y(x) = 0$  für  $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ,

$$4. \lim_{x \uparrow y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-1} g_y(x) - \lim_{x \downarrow y} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-1} g_y(x) = \frac{1}{a_n(y)}.$$

**Bemerkung 13.10.1** Um  $g_y$  zu finden, müsste man  $Lg_y = 0$  auf  $[a, y]$  und auf  $[y, b]$  lösen. Für diese zwei Lösungen  $g_{y,\ell}$  und  $g_{y,r}$  hätte man dann insgesamt  $n$  Randbedingungen aus 2,  $n-1$  Randbedingungen aus 3, und eine aus 4. Zwei Lösungen mit  $n + (n-1) + 1 = 2n$  Randbedingungen könnte passen für zwei eindeutige Lösungen  $g_{y,\ell}$  und  $g_{y,r}$  dieser Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.

Die lineare Differentialgleichung  $Lu = 0$  hat ein Fundamentalsystem  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . Das bedeutet, dass die Lösungen von  $Lg_y(x) = 0$  für  $x \neq y$  zu schreiben sind als

$$g_y(x) = \begin{cases} c_{1,y}^\ell u_1(x) + c_{2,y}^\ell u_2(x) + \dots + c_{n,y}^\ell u_n(x) & \text{für } x \in [a, y), \\ c_{1,y}^r u_1(x) + c_{2,y}^r u_2(x) + \dots + c_{n,y}^r u_n(x) & \text{für } x \in (y, b]. \end{cases} \quad (13.21)$$

Die Bedingung  $Rg_y = 0$  gibt  $n$  Gleichungen und die Eigenschaften in 3 und 4 geben nochmals  $n$  lineare Gleichungen für die  $2n$  Konstanten  $c_{i,y}^r$  und  $c_{i,y}^\ell$ :

$$\begin{pmatrix} R_1^\ell u_1 & \dots & R_1^\ell u_n & R_1^r u_1 & \dots & R_1^r u_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n^\ell u_1 & \dots & R_n^\ell u_n & R_n^r u_1 & \dots & R_n^r u_n \\ u_1(y) & \dots & u_n(y) & -u_1(y) & \dots & -u_n(y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(y) & \dots & u_n^{(n-1)}(y) & -u_1^{(n-1)}(y) & \dots & -u_n^{(n-1)}(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,y}^\ell \\ \vdots \\ c_{n,y}^\ell \\ c_{1,y}^r \\ \vdots \\ c_{i,y}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n(y)} \end{pmatrix}$$

Diese linearen Gleichungen haben entweder genau eine Lösung oder das homogene Problem hat eine nicht-triviale Lösung. Das letztere ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass (13.20) nur die triviale Lösung hat. Mit dieser Annahme gibt es also für jedes  $y \in (a, b)$  genau eine Lösung  $g_y(x)$ . Weil die Einträge in der Matrix mindestens stetig differenzierbar sind als Funktion von  $y$ , ist die inverse Matrix auch stetig differenzierbar und es folgt aus der Stetigkeit von  $y \mapsto a_n(y)^{-1}$ , dass die Konstanten  $c_{i,y}^r$  und  $c_{i,y}^\ell$  stetig von  $y$  abhängen. Dann ist  $(x, y) \mapsto g_y(x) : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und sogar gleichmäßig stetig weil  $[a, b]^2$  kompakt ist. Wir setzen

$$G(x, y) = g_y(x),$$

und zeigen, dass  $G$  die passende Greensche Funktion ist:

Aus Eigenschaft 3. folgt mit Induktion, dass für  $k \leq n-1$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \int_a^b G(x, y) f(y) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} G(x, y) f(y) dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_a^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} G(x, y) f(y) dy + \int_x^b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} G(x, y) f(y) dy \right) = \\ &= \lim_{y \uparrow x} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_a^x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k G(x, y) f(y) dy + \\ &\quad - \lim_{y \downarrow x} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{k-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_x^b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k G(x, y) f(y) dy = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^k G(x, y) f(y) dy. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Aus Eigenschaft 4. folgt ähnlich

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \int_a^b G(x, y) f(y) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y) f(y) dy = \\
 & = \lim_{y \uparrow x} \left( \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_a^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y) f(y) dy + \\
 & \quad - \lim_{y \downarrow x} \left( \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1} G(x, y) \right) f(x) + \int_x^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y) f(y) dy = \\
 & = \frac{1}{a_n(x)} f(x) + \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y) f(y) dy, \tag{13.23}
 \end{aligned}$$

wobei dieser Integral uneigentlich ist in  $y$ . Weil  $g_y(x)$  die Form in (13.21) hat, ist die Funktion  $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y)$  für  $k \leq n-1$  stetig auf  $[a, b]$  und ist  $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y)$  stetig auf  $[a, b]$  mit Ausnahme eines Sprungs in  $y$ .

Zusammengefasst: Ableitungen von Grad bis einschließlich  $n-1$  kann man durch das Integralzeichen schieben und die Ableitung von Grad  $n$  liefert zusätzlich einen extra Term.

Kombiniert man (13.22-13.23) mit (13.18), dann folgt

$$L \int_a^b G(x, y) f(y) dy = f(x) + \int_a^b LG(x, y) f(y) dy = f(x).$$

Weil  $R$  höchstens  $(n-1)$ -te Ableitungen enthält, folgt auch

$$R \int_a^b G(x, y) f(y) dy = \int_a^b RG(x, y) f(y) dy = 0.$$

Die Funktion  $x \mapsto \int_a^b G(x, y) f(y) dy$  ist so eine Lösung vom Randwertproblem (13.17).

**Theorem 13.11** Seien  $L$  und  $R$  wie in (13.18) und (13.19). Wenn das homogene Randwertsystem (13.20) nur die triviale Lösung hat, dann hat (13.17) für jedes  $f \in C[a, b]$  genau eine Lösung  $u \in C^n[a, b]$ . Außerdem gibt es  $C > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C[a, b]$  die Lösung  $u$  die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\|u\|_{C^n[a, b]} \leq C \|f\|_{C[a, b]}.$$

**Bemerkung 13.11.1** Wenn die Annahmen erfüllt sind, hat man die drei Eigenschaften von Hadamard für ein wohldefiniertes Problem: Existenz, Eindeutigkeit und Stetigkeit bezüglich  $f$ .

**Beweis.** Die Greenschen Funktion die oben konstruiert worden ist, gibt die Existenz einer Lösung. Aus (13.22) und (13.23) folgt sogar, dass für diese Lösung gilt  $u \in C^n[a, b]$ .

Wenn es mehrere Lösungen gibt zu dem gleichen  $f$ , sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann ist  $u_1 - u_2$  eine nicht-triviale Lösung der homogenen Gleichung und das ist ein Widerspruch zu der Annahme.

Die Abschätzung folgt aus der Darstellung mit der Greenschen Funktion und

$$\begin{aligned}
 c_k &= \max_{x \in [a, b]} \int_a^b \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(x, y) \right| dy \text{ für } k \leq n-1 \\
 c_n &= \max_{x \in [a, b]} \left( \frac{1}{a_n(x)} + \int_a^b \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n G(x, y) \right| dy \right).
 \end{aligned}$$

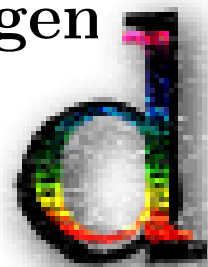
Man sollte bemerken, dass die Integralen für  $c_k$  mit  $k \in \{n-1, n\}$  uneigentlich sind: an der Stelle  $y = x$  sind sie nicht definiert. ■



# Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Woche 14

## Nicht-lineare Randwertprobleme



### 14.1 Lösungen durch Schießen

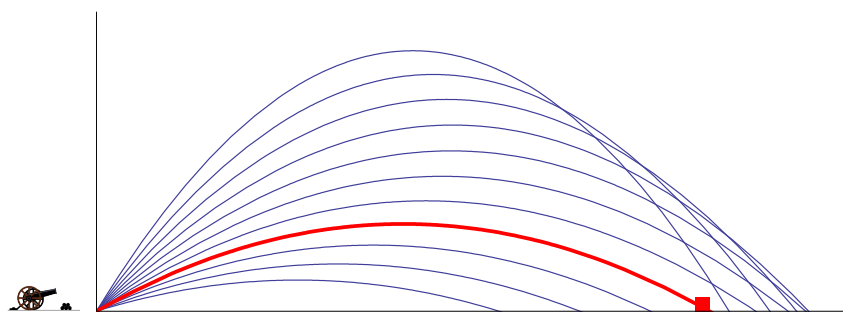


Abbildung 14.1: *Militärischer Satz: Wenn man zu weit und zu kurz schießen kann, dann kann man auch treffen.*

Betrachten wir für  $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  das nicht-lineare Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (14.1)$$

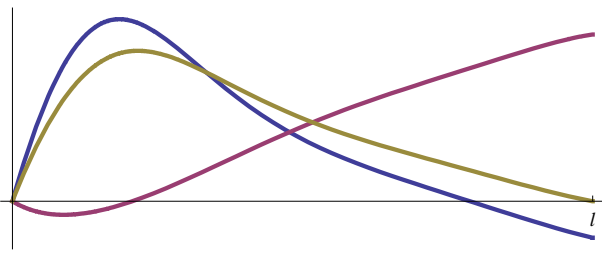
**Theorem 14.1** Sei  $f$  wie oben und sei  $[a, b] \in \mathbb{R}$  derart, dass die Lösung  $u_\theta$  vom Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x), u'(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(0) = \theta \end{cases} \quad (14.2)$$

für jede  $\theta \in [a, b]$  beschränkt ist auf  $[0, \ell]$ , und dass außerdem gilt

$$u_a(\ell) < 0 < u_b(\ell) \text{ oder } u_b(\ell) < 0 < u_a(\ell).$$

Dann gibt es ein  $\theta \in (a, b)$  mit  $u_\theta(\ell) = 0$ .



In diese Abbildung wird das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = (1 - u(x)^2 - u'(x)) (\cos(x) + 1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(4) = 0. \end{cases}$$

betrachtet. Eine Funktion löst die Differentialgleichung mit Anfangswerten  $u(0) = 0$  und  $u'(0) = 6$ ; eine zweite mit  $u(0) = 0$  und  $u'(0) = -1$ .

Abbildung 14.2: Anwendung der stetigen Abhängigkeit der Anfangswerte.

**Beweis.** Für  $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  und Lösungen  $u_\theta$  von (14.2) mit Existenzintervall  $(T_\theta^-, T_\theta^+) \supset [0, \ell]$  existiert

$$M = \max \{ \|(u_\theta(x), u'_\theta(x))\| ; x \in [0, \ell] \text{ und } \theta \in [a, b] \}.$$

Dann ist

$$L = \max \left\{ 1 + \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, v) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial v}(x, u, v) \right| ; x \in [0, \ell] \text{ und } \|(u, v)\| \leq M \right\}$$

eine Lipschitz-Konstante für

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x) \\ f(x, u(x), v(x)) \end{pmatrix}.$$

Wegen Korollar 7.8 gilt

$$\begin{aligned} |u_{\theta_1}(x) - u_{\theta_2}(x)| &\leq \left\| \begin{pmatrix} u_{\theta_1}(x) - u_{\theta_2}(x) \\ u'_{\theta_1}(x) - u'_{\theta_2}(x) \end{pmatrix} \right\| \leq \\ &\leq e^{Lx} \left\| \begin{pmatrix} u_{\theta_1}(0) - u_{\theta_2}(0) \\ u'_{\theta_1}(0) - u'_{\theta_2}(0) \end{pmatrix} \right\| = e^{Lx} |\theta_1 - \theta_2| \end{aligned}$$

und es folgt, dass  $\theta \mapsto u_\theta(\ell)$  eine stetige Funktion ist. Der Zwischenwertsatz gibt das gewünschte Ergebnis. ■

## 14.2 Lösungen zwischen Ober- und Unterlösungen

Betrachten wir für  $f \in C^1([0, \ell], \mathbb{R})$  das nicht-lineare Randwertproblem zweiter Ordnung:

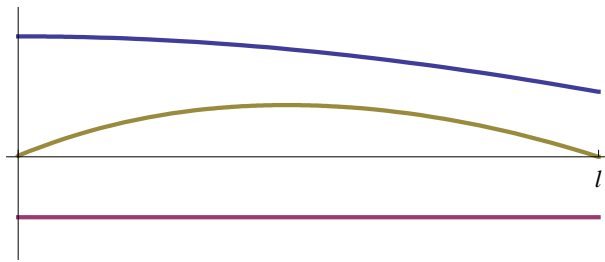
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (14.3)$$

**Definition 14.2** Die Funktion  $v \in C^2[0, 1]$  heißt eine Oberlösung für (14.3), wenn

$$\begin{cases} -v''(x) \geq f(x, v(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ v(0) \geq 0 \text{ und } v(\ell) \geq 0. \end{cases} \quad (14.4)$$

Die Funktion  $w \in C^2[0, 1]$  heißt eine Unterlösung für (14.3), wenn

$$\begin{cases} -w''(x) \leq f(x, w(x)) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ w(0) \leq 0 \text{ und } w(\ell) \leq 0. \end{cases} \quad (14.5)$$



In dieser Abbildung werden eine Ober-, eine Unter- und eine Lösung zum Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = 5(u(x) + 1)(\cos x - u(x)) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0. \end{cases}$$

dargestellt. Die Unterlösung ist  $w(x) = -\frac{1}{2}$ , die Oberlösung  $v(x) = \cos x$ . Für die Lösung gibt es keine explizite Formel.

Abbildung 14.3: Oberlösung oberhalb einer Unterlösung gibt eine Lösung

**Bemerkung 14.2.1** Wenn eine Funktion gleichzeitig Ober- und Unterlösung ist, dann ist sie eine Lösung.

**Theorem 14.3** Wenn es eine Oberlösung  $v$  und eine Unterlösung  $w$  gibt für (14.3), und wenn  $w(x) \leq v(x)$  für  $x \in (0, \ell)$ , dann gibt es eine Lösung  $u$  mit

$$w(x) \leq u(x) \leq v(x) \text{ für } x \in (0, \ell).$$

**Beweis. 1.** Man ersetzt  $f$  durch  $f^*$ , das man definiert durch

$$f^*(x, s) = \begin{cases} f(x, w(x)) & \text{für } s \leq w(x), \\ f(x, s) & \text{für } s \in [w(x), v(x)], \\ f(x, v(x)) & \text{für } s \geq v(x). \end{cases}$$

Diese Funktion erfüllt die folgende Lipschitz-Bedingung:

$$|f^*(x, u_1) - f^*(x, u_2)| \leq L |u_1 - u_2| \text{ für alle } x \in [0, \ell] \text{ und } u \in \mathbb{R} \quad (14.6)$$

mit  $L = \max \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \right| ; x \in [0, \ell], u \in [\min_{x \in [0, \ell]} w(x), \max_{x \in [0, \ell]} v(x)] \right\}$ .

Wir betrachten das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = f^*(x, u(x)) + Lu(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0 \end{cases}$$

und bemerken, dass wegen (14.6) folgendes gilt:

**Hilfslemma 14.3.1** Die Funktion  $u \mapsto f^*(x, u) + Lu$  ist monoton wachsend für jedes  $x \in [0, \ell]$ .

2. Wegen Theorem 13.11, ist

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = g(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0 \end{cases} \quad (14.7)$$

eindeutig lösbar mit Hilfe einer Greenschen Funktion:

$$G_L(x, y) = \begin{cases} -\frac{u_\ell(x)u_r(y)}{W(y)} & \text{für } 0 \leq x \leq y \leq \ell, \\ -\frac{u_\ell(y)u_r(x)}{W(y)} & \text{für } 0 \leq y < x \leq \ell, \end{cases}$$

und

$$u_\ell(x) = \sinh(\sqrt{L}x), \quad u_r(x) = \sinh(\sqrt{L}(\ell - x)).$$

Es folgt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u_\ell(x) & u_r(x) \\ u'_\ell(x) & u'_r(x) \end{pmatrix} = -\sqrt{L} \sinh(\sqrt{L}\ell) < 0.$$

Wir finden, dass

$$G_L(x, y) \geq 0. \quad (14.8)$$

Nennen wir den Lösungsoperator  $\mathcal{G}_L$ , also  $u = \mathcal{G}_L g$  löst (14.7), und

$$\mathcal{G}_L g(x) = \int_0^\ell G_L(x, y) g(y) dy,$$

so gilt folgendes:

**Hilfslemma 14.3.2**  $g \geq 0$  auf  $[0, \ell]$  impliziert  $G_L g \geq 0$  auf  $[0, \ell]$ .

3. Im dritten Schritt betrachten wir das Iterationsverfahren:

$$\begin{cases} u_0 = v \\ u_{n+1} = \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, u_n) + Lu_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (14.9)$$

Wir werden erst die folgende Behauptung zeigen.

**Hilfslemma 14.3.3**  $w \leq u_n \leq v$  auf  $[0, \ell]$  impliziert  $w \leq u_{n+1} \leq v$  auf  $[0, \ell]$ .

Wegen Hilfslemma 14.3.2 erhält der Operator  $\mathcal{G}_L$  auch die Anordnung:

$$g_1 \leq g_2 \text{ auf } [0, \ell] \implies \mathcal{G}_L g_1 \leq \mathcal{G}_L g_2 \text{ auf } [0, \ell]. \quad (14.10)$$

Man findet wegen  $u_n \leq v$  und der Annahme, dass  $v$  Oberlösung ist:

$$\begin{aligned} -u''_{n+1}(x) + Lu_{n+1}(x) &= f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \leq \\ &\leq f^*(x, v(x)) + Lv(x) \leq -v''(x) + Lv(x). \end{aligned}$$

Mit (14.10) folgt

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, u_n) + Lu_n)(x) \leq \\ &\leq \mathcal{G}_L(f^*(\cdot, v) + Lv)(x) \leq \mathcal{G}_L(-v'' + Lv)(x). \end{aligned}$$

Diese letzte Formel kann man expliziter schreiben:

$$\mathcal{G}_L(-v'' + Lv)(x) = v(x) - \frac{v(0)}{u_r(0)} u_r(x) - \frac{v(\ell)}{u_\ell(\ell)} u_\ell(x) \quad (14.11)$$

Die rechte Seite von (14.11) löst nämlich genau das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + Lu(x) = -v''(x) + Lv(x) \text{ für } x \in (0, \ell), \\ u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0, \end{cases}$$

und diese Lösung ist eindeutig. Weil  $v(0), u_r(0), v(\ell), u_\ell(\ell) > 0$  folgt

$$u_{n+1}(x) \leq v(x) - \frac{v(0)}{u_r(0)} u_r(x) - \frac{v(\ell)}{u_\ell(\ell)} u_\ell(x) \leq v(x) \text{ für } x \in [0, \ell].$$

Auf ähnliche Art folgt  $u_{n+1}(x) \geq w(x)$  für  $x \in [0, \ell]$ .



**Hilfslemma 14.3.4** Wenn  $u_n$  eine Oberlösung ist, dann ist  $u_{n+1}$  eine Oberlösung.

Es gilt für  $x \in [0, \ell]$ , dass

$$-u_{n+1}''(x) + Lu_{n+1}(x) = f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \leq -u_n''(x) + Lu_n(x).$$

Wie oben mit  $v$  ersetzt durch  $u_n$  folgt

$$u_{n+1}(x) \leq u_n(x) \text{ für } x \in [0, \ell]$$

und dann auch

$$-u_{n+1}''(x) + Lu_{n+1}(x) = f^*(x, u_n(x)) + Lu_n(x) \geq f^*(x, u_{n+1}(x)) + Lu_{n+1}(x).$$

Weil auch die Randbedingungen erfüllt sind, ist  $u_{n+1}$  eine Oberlösung.

4. Als nächstes wird die Konvergenzfrage zu dieser Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  beantwortet.

**Hilfslemma 14.3.5** Die Folge  $\{u_n\}_{n=0}^\infty$  ist konvergent in  $C^2[0, \ell]$ .

Für jedes  $x \in [0, 1]$  ist  $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$  eine fallende nach unten durch  $w(x)$  beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann existiert  $u_\infty$  definiert durch

$$u_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

Man schreibt  $[w, v] = \{u \in [0, \ell]; w(x) \leq u(x) \leq v(x) \text{ für } x \in [0, \ell]\}$ . Weil  $u_n \in [w, v]$  ist die Folge  $\{u_n\}$  gleichmäßig beschränkt.

Für  $u \in [w, v]$  ist  $f(\cdot, u) + Lu \in C[0, \ell]$  gleichmäßig beschränkt, und weil  $(x, y) \mapsto G_L(x, y)$  stetig ist, folgt, dass  $x \mapsto \mathcal{G}_L(f(\cdot, u) + Lu)(x)$  gleichgradig stetig ist für  $u \in [w, v]$ . Insbesondere bedeutet das, dass  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  gleichgradig stetig ist.

Wegen Arzela-Ascoli gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $u_{n_k}$  mit  $u_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x)$  wobei  $u_\infty$  stetig ist.

5. Zuletzt zeigen wir noch, dass  $u$  so ist, wie wir es haben wollen.

**Hilfslemma 14.3.6**  $u_\infty$  ist eine Lösung von (14.3).

Weil die  $u_n$  geordnet sind,

$$v(x) \geq u_1(x) \geq \cdots \geq u_{n_k-1}(x) \geq u_{n_k}(x) \geq u_{n_k+1}(x) \geq \cdots \geq u_{n_{k+1}}(x) \geq \cdots \geq w(x),$$

folgt sogar, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k}(x)$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt außerdem

$$\begin{aligned} u_\infty(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{G}_L f^*(\cdot, u_n(\cdot)) + Lu_n(\cdot))(x) = \\ &= \left( \mathcal{G}_L \lim_{n \rightarrow \infty} (f^*(\cdot, u_n(\cdot)) + Lu_n(\cdot)) \right) (x) = \mathcal{G}_L (f^*(\cdot, u_\infty(\cdot)) + Lu_\infty(\cdot))(x) \end{aligned}$$

und so gilt  $u_\infty(0) = 0$ ,  $u_\infty(\ell) = 0$  und

$$u_\infty''(x) + Lu_\infty(x) = f^*(x, u_\infty(x)) + Lu_\infty(x).$$

Weil weiter gilt, dass  $w(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u_\infty(x) \leq v(x)$ , folgt auch, dass

$$f^*(x, u_\infty(x)) = f(x, u_\infty(x)).$$

Das heißt,  $u_\infty$  ist eine Lösung von (14.3). ■

**Bemerkung 14.3.1** Man hätte auch  $u_0 = w$  nehmen können in (14.9). Man würde dann eine wachsende Folge von Unterlösungen finden, die zu einer Lösung  $u_\infty^*$  konvergieren würde. Man findet, dass  $u_\infty^*(x) \leq u_\infty(x)$  für  $x \in [0, \ell]$ . Beide Lösungen sind nicht unbedingt identisch.

**Bemerkung 14.3.2** Diese Methode ist viel allgemeiner anwendbar. Bei anderen Randbedingungen wie zum Beispiel

$$u(-1) = 5 \text{ und } u'(1) = 11$$

kann man auch so vorgehen. Es führt zu weit, hier eine genaue Beschreibung zu geben, welche Möglichkeiten erlaubt sind und welche Ungleichungsrichtung zu welcher Randbedingung für Ober- und Unterlösungen passen würde.

**Beispiel 14.4** Betrachten wir

$$\begin{cases} -u''(x) = \cos x - (u(x))^2 \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0 \text{ und } u(1) = 0. \end{cases} \quad (14.12)$$

Die Funktion  $v(x) = 1$  erfüllt

$$-v''(x) = 0 \geq \cos x - 1 \text{ und } v(-1) = v(1) = 1 \geq 0$$

und die Funktion  $w(x) = 0$  erfüllt

$$-w''(x) = 0 \leq \cos x - 0 \text{ und } w(-1) = v(1) = 0 \leq 0.$$

Weil auch gilt, dass  $w(x) \leq v(x)$ , ist  $w$  eine Unterlösung unterhalb von  $v$ , und Theorem 14.3 liefert die Existenz einer Lösung des Randwertproblems.

**Beispiel 14.5** Für

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \text{ für } x \in (-1, 1), \\ u(-1) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases} \quad (14.13)$$

können wir nun auf drei Arten herangehen.

1. Man kann versuchen, (formal) eine Lösung zu berechnen:

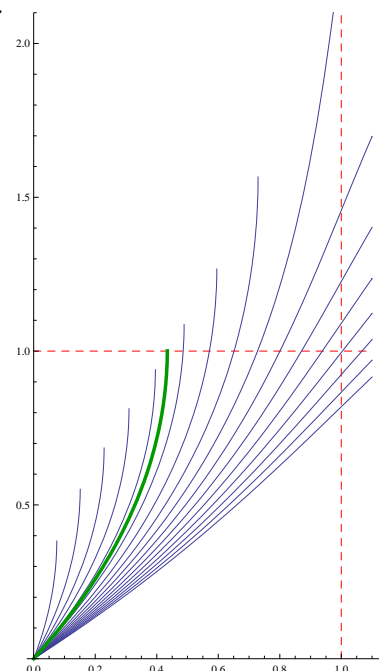
$$\begin{aligned} -u''(x) u'(x) &= u'(x) - (u(x))^2 u'(x), \\ -\frac{1}{2} (u'(x))^2 + c &= u(x) - \frac{1}{3} u(x)^3, \\ \int_0^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{2c - 2u + \frac{2}{3}u^3}} &= \pm \int_{-1}^x dx. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$f_c(v) = \int_0^v \frac{du}{\sqrt{2c - 2u + \frac{2}{3}u^3}}.$$

Für  $c \in (0, \frac{2}{3})$  existiert die Funktion  $f_c : [0, u_c] \rightarrow \mathbb{R}$  bei dem  $u_c$  die erste positive Lösung von  $2c - 2u_c + \frac{2}{3}u_c^3 = 0$  ist.

Für  $c > \frac{2}{3}$  hat  $2c - 2u_c + \frac{2}{3}u_c^3 = 0$  keine positive Nullstelle, und es existiert die Funktion  $f_c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Skizzen zu diesen Funktionen  $f_c$  stehen rechts.



Die Funktionen  $f_c$  sind streng wachsend und invertierbar. Man kann zeigen, dass es ein  $c_* \in (0, \frac{2}{3})$  gibt, mit  $f_{c_*}(u_{c_*}) = 1$ . In der Figur ist diese Funktion  $f_{c_*}$  in grün dargestellt. Man hat  $\lim_{u \uparrow u_{c_*}} f'_{c_*}(u) = \infty$ . Es folgt

$$\lim_{s \uparrow 1} (f_{c_*}^{\text{inverse}})'(s) = 0$$

und man kann die Funktion durch „Spiegelung“ fortsetzen. Für  $x \in [-1, 0]$  findet man

$$f_{c_*}(u(x)) = 1 + x$$

und

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 + x) \text{ für } x \in [-1, 0].$$

Die Spiegelung liefert

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 - x) \text{ für } x \in [0, 1].$$

Die gefragte Lösung ist

$$u(x) = f_{c_*}^{\text{inverse}}(1 - |x|) \text{ für } x \in [-1, 1].$$

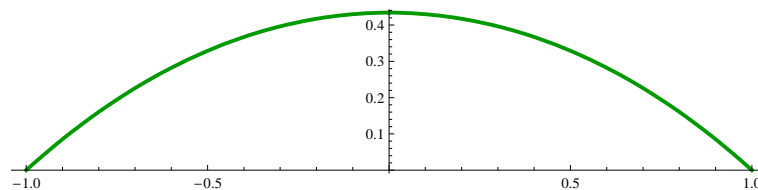


Abbildung 14.4: Die Lösung durch invertieren von  $f_{c_*}$  und symmetrisch fortsetzen.

2. Wenn man nur an der Existenz interessiert ist, geht es einfacher. Eine Oberlösung ist  $v(x) = 1$  und eine Unterlösung ist  $w(x) = 0$ . Weil auch  $w(x) \leq v(x)$  gilt, gibt es eine Lösung. Man kann diese Lösung sogar approximieren indem man  $u_0 = v$  setzt und für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktionen  $u_{n+1}$  iterativ zu konstruieren aus

$$\begin{cases} -u''_{n+1}(x) + 2u_{n+1}(x) = 1 - (u_n(x))^2 + 2u_n(x) \\ u_{n+1}(-1) = 0 \text{ und } u_{n+1}(1) = 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $u \mapsto 1 - u^2 + 2u$  ist wachsend auf  $[0, 1]$ .

3. Eine dritte Möglichkeit ist ein Schießverfahren zu definieren:

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \\ u(-1) = 0 \\ u'(-1) = s. \end{cases}$$

Weil man symmetrische Lösungen erwartet, kann man auch aus der Mitte schießen mit der Höhe als Parameter und die Ableitung gleich Null. Das bedeutet, man betrachtet das folgende Anfangswertproblem.

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 - (u(x))^2 \\ u(0) = h \\ u'(0) = 0. \end{cases}$$

Man verwendet die Tatsache, dass wenn  $x \mapsto u(x)$  eine Lösung ist, auch  $x \mapsto u(-x)$  eine Lösung ist.

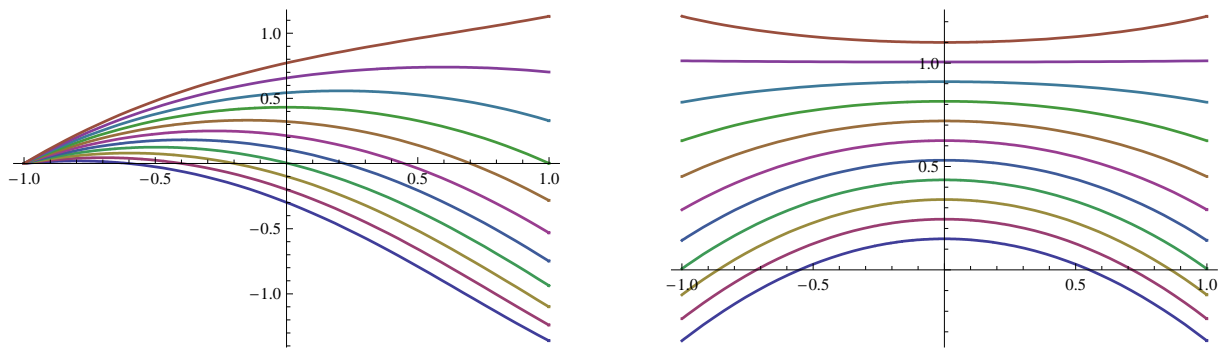


Abbildung 14.5: Links wird von  $-1$  geschossen mit der Ableitung in  $-1$  als Parameter. Rechts schießt man symmetrisch aus  $0$  mit der Höhe in  $0$  als Parameter. Auch hier ist die Lösung grün dargestellt.

# Literaturverzeichnis

- [1] Robert L. Borrelli und Courtney S. Coleman, Differential equations. A modeling perspective. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.  
ISBN: 0-471-04230-7
- [2] Philip Hartman, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.  
2<sup>nd</sup> edition by SIAM: ISBN: 0-89871-510-5
- [3] Harro Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung in Lehre und Gebrauch. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 2006.  
ISBN: 3-519-42227-1
- [4] James Hetao Liu, A first course in the qualitative theory of differential equations, Pearson Education, New Jersey, 2003.  
ISBN: 0-13-008380-1
- [5] Wolfgang Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1993.  
ISBN: 3-540-56294-X