1. Berechnen Sie alle beschränkten Lösungen von

$$x''''(t) - x(t) = \sin(2t)\,.$$

PS: Eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|x(t)| \le M$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Geben Sie jeweils alle Funktionen an, die die folgenden Anfangswertprobleme lösen.

   (a) $u'(t) = u(t) - t\,u(t)^2$, $u(1) = 1$

   (b) $y'(x) = 2\sqrt[3]{x\,y(x)}$, $y(0) = 0$

3. Geben Sie die Lösung an von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sei die Matrix M reell und habe folgende Eigenschaften:

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; M \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Wir betrachten das System

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) - v(t)^3, \\ v'(t) = v(t) - u(t)^2. \end{cases}$$

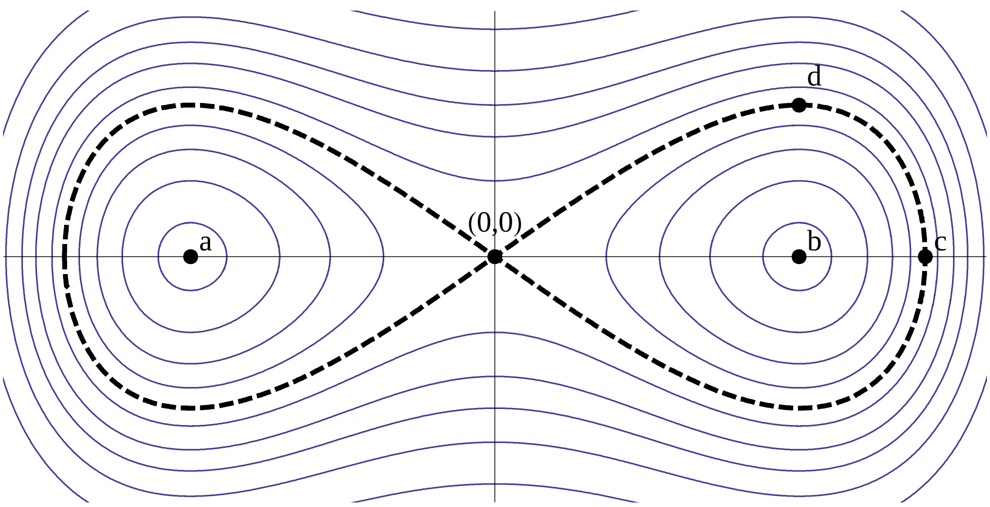
   (a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte.

   (b) Bestimmen Sie zu jedem Gleichgewichtspunkt die Stabilität.

5. Die Phasenebene zu

$$u''(t) = u(t) - \tfrac{1}{8}u(t)^3$$

ist in untenstehender Abbildung skizziert. Wie lauten die Koordinaten von a, b, c und d?



6. Gegeben seien die zwei Anfangswertprobleme

$$a)\ \begin{cases} u'(t) = e^{-t} + u(t)^2 \\ u(0) = 0 \end{cases} \qquad\qquad b)\ \begin{cases} u'(t) = e^{t} - u(t)^3 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

und die zwei Eigenschaften:

I) Die Lösung hat als maximales Existenzintervall (T_-, T_+) mit $T_+ < \infty$.

II) Die Lösung hat als maximales Existenzintervall (T_-, T_+) mit $T_+ = \infty$.

Eines der Anfangswertprobleme hat Eigenschaft I, das andere Eigenschaft II. Entscheiden Sie, welche Eigenschaft zu welchem Problem gehört, und begründen Sie Ihre Antwort.

7. Man betrachte

$$\begin{cases} v''(t) + \cos(v(t)) = 0, \\ v(0) = 0, \\ v(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $w(t) = t(\pi - t)$ eine Oberlösung ist für (1).

(b) Geben Sie auch eine Unterlösung für (1) an.

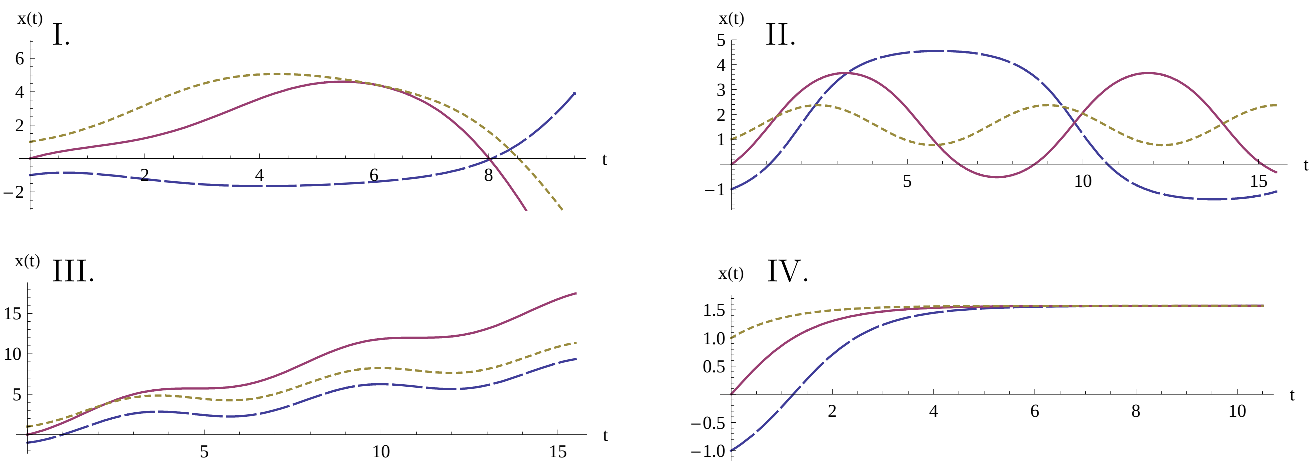
(c) Gibt es eine Lösung für (1)?

8. Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$(a)\ \begin{cases} x''(t) = \cos(t) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x'(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases}$$

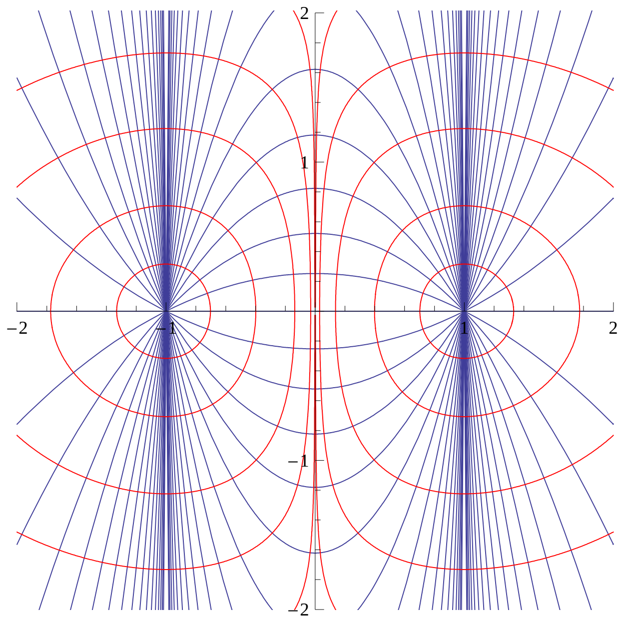
$$(c)\ \begin{cases} x''(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} x'''(t) = \cos(x(t)) \\ x(0) = c \\ x'(0) = \cos(c) \end{cases}$$

Im Folgenden sind Lösungen mit $c \in \{-1, 0, 1\}$ dargestellt. Welches Bild gehört zu welchem Anfangswertproblem? Begründen Sie Ihre Antworten.



9. Finden Sie eine Familie von Trajektorien, die orthogonal liegen zu

$$\left\{(x,y); y = c\left(1-x^2\right)\right\}_{c\in\mathbb{R}}.$$



10. Wie kann man mit der Picard-Iteration eine Lösung zu folgendem Problem approximieren?

$$\begin{cases} x''(t) = -x(t) - \left(x'(t)\right)^3 \\ x(0) = 0 \text{ und } x'(0) = 1 \end{cases}$$