1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme. Sind die Lösungen jeweils eindeutig? Auf welchen Intervallen sind sie maximal definiert?

   (a) $u''(t) - u'(t) + 6u(t) = t^2 + \frac{2}{3}t$, $u(0) = 2$

   (b) $y'(x) = -\operatorname{sgn}(y(x) - 2)$, $y(0) = 0$

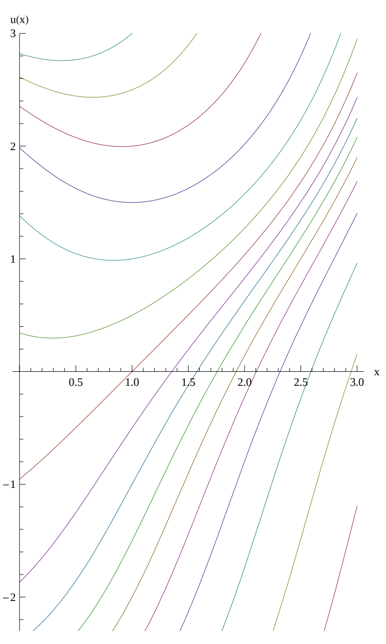
   (c) $x'(t) = \frac{2t}{1+2x(t)}$, $x(2) = 0$

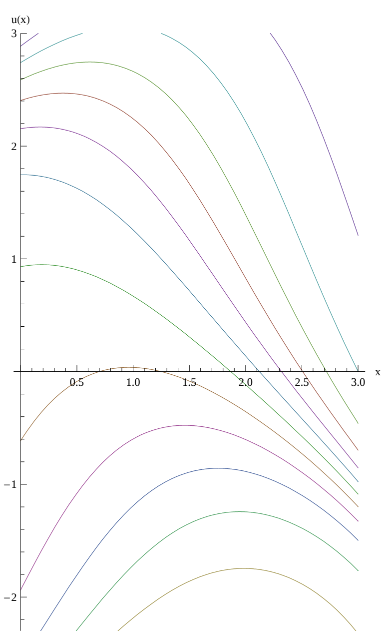
2. (a) Sei $A \in M^{n\times n}(\mathbb{R})$ und $\{\varphi_i \in \mathbb{R}^n; 1 \le i \le n\}$ eine Basis für $\mathbb{R}^n$ von Eigenvektoren von A. Die zugehörigen Eigenwerte nennen wir $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, das heißt: $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$. Zeigen Sie, dass
$$\exp(tA)\varphi_i = e^{\lambda_i t}\varphi_i.$$

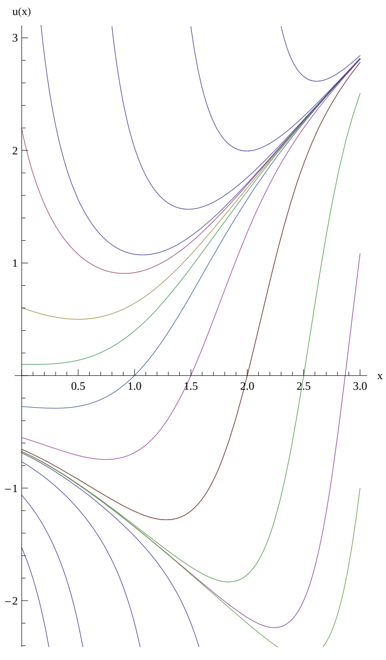
   (b) Sei $A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit folgenden Eigenwerten und Eigenvektoren:
$$\lambda_1 = 1 \text{ mit } \varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \text{ mit } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 0 \text{ mit } \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie die Lösung zu $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Wie müssen die Vorzeichen von c_1 und c_2 in
$$-u''(t) = c_1 u(t) + c_2 u'(t) + f$$
gewählt werden, damit die Gleichung physikalisch die Auslenkung einer Feder unter Berücksichtigung der Reibung beschreibt?

4. Man hat Skizzen zu drei verschiedenen Differentialgleichungen hergestellt:
$$\begin{array}{ll} 1. & u'(x) = x^2 - (u(x))^2 \\ 2. & u'(x) = x - \sin(u(x)) \\ 3. & u'(x) = 1 - x - \sin(u(x)) \end{array}$$
   Welche Skizze gehört zu welchem Bild?







5. Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{cases} u'(t) &= -\frac{1}{2}\left(u(t)\right)^3 + 2u(t)\left(v(t)\right)^2 \\ v'(t) &= -\left(v(t)\right)^3 \end{cases}$$

   (a) Berechnen Sie die Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt des Systems. Welche Aussage kann man über die Stabilität des Systems treffen?

   (b) Bestimmen Sie eine Lyapunov-Funktion der Form $V(u,v) = av^2 + bu^2$. Welche Aussage kann man nun über die Stabilität treffen?

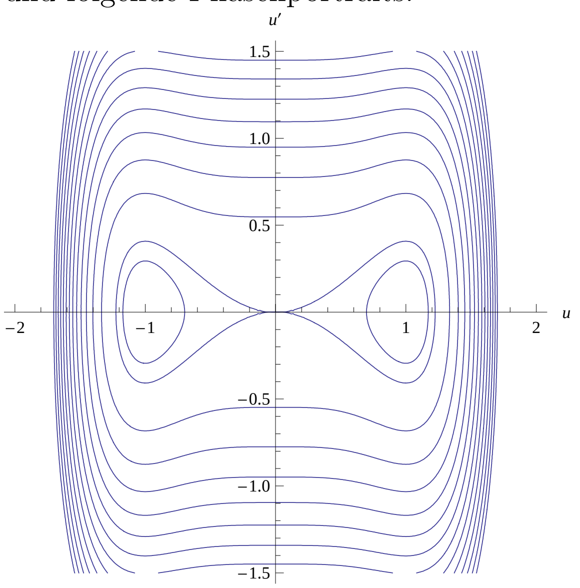
6. Finden Sie eine Familie von Trajektorien, die orthogonal liegen zu

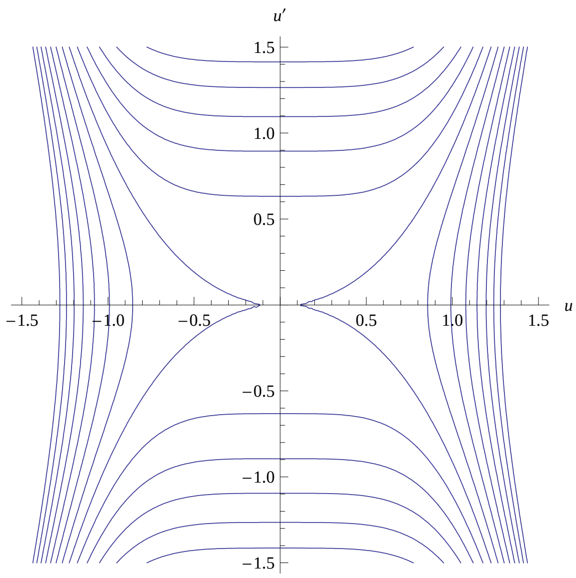
$$\left\{(x,y); y^2 + 2x^2 = c\right\}_{c\in\mathbb{R}}.$$

7. Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$u''(t) = \left(u(t)\right)^3\left(1 + \left(u(t)\right)^2\right) \qquad\qquad u''(t) = \left(u(t)\right)^3\left(1 - \left(u(t)\right)^2\right)$$

und folgende Phasenportraits:





   (a) Ordnen Sie die Phasenportraits der jeweils zugehörigen Differentialgleichung zu.

   (b) Zeichnen Sie stationäre Punkte und Durchlaufrichtung der Trajektorien ein.

   (c) Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob es periodische Lösungen gibt (ohne Beweis).

8. Zeigen Sie, dass das folgende Randwertproblem mindestens eine Lösung hat.

$$\begin{cases} u''(x) = \cos\left(u(x)\right)\left(u(x) - 1\right) \text{ für } x \in (-1,1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

9. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

   für jedes $f \in C[0,1]$ genau eine Lösung?

10. Es seien die folgenden Differentialgleichungen gegeben:

$$
\begin{aligned}
\text{i) } & u'(t) = 1 + (u(t))^3, \ u(0) = c \\
\text{ii) } & u'(t) = 1 - (u(t))^3, \ u(0) = c \\
\text{iii) } & u'(t) = \sqrt[3]{u(t)}, \ u(0) = c
\end{aligned}
$$

Entscheiden Sie für jede Differentialgleichung mit Begründung, ob die folgenden Aussagen zutreffen.

(a) Jede Lösung der Differentialgleichung existiert für alle $t \geq 0$.

(b) Jede Lösung der Differentialgleichung endet in endlicher Zeit, d.h. in Abhängigkeit vom Anfangswert $u(0) = c$ gibt es ein $t_c > 0$, so dass u(t) nicht existiert für $t > t_c$.

(c) Zu jedem Anfangswert $u(0) = c$ gibt es genau eine Lösung.

(d) Es gibt einen Anfangswert $u(0) = c$ mit mehreren Lösungen.

(e) Jede Lösung der Differentialgleichung ist beschränkt auf $[0, \infty)$, d.h. zu jeder Lösung u gibt es ein $M_u > 0$, so dass $|u(t)| < M_u$ gilt für alle $t > 0$.