

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 1

Diese Hausaufgaben werden am 16.10.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

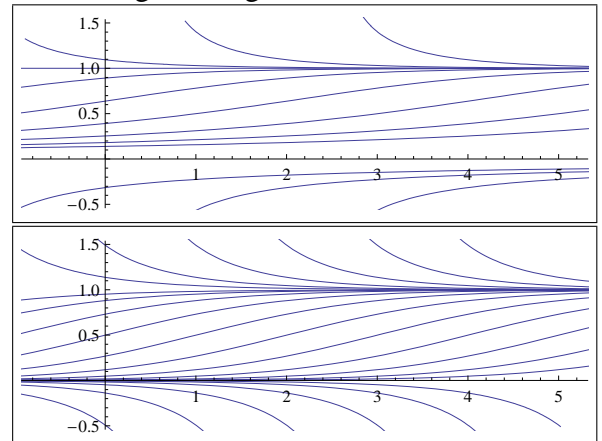
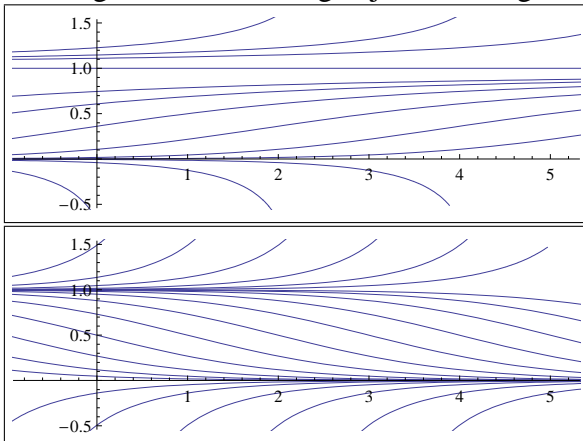
Aufgabe 1. Man gebe alle Lösungen an von

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| i. $y'(x) = y(x);$ | iii. $y'(x) = 1 - y(x);$ |
| ii. $y''(x) = \sin(x);$ | iv. $y''(x) = y(x).$ |

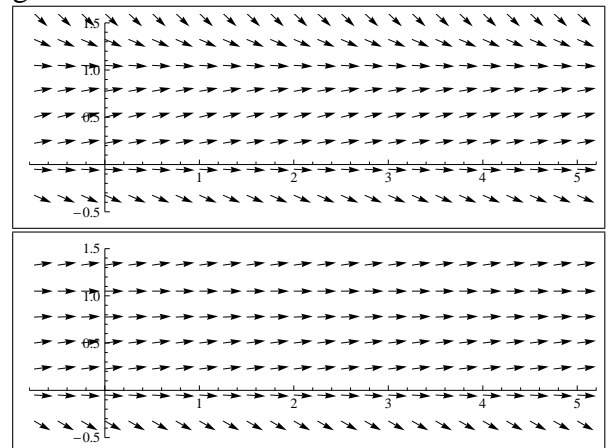
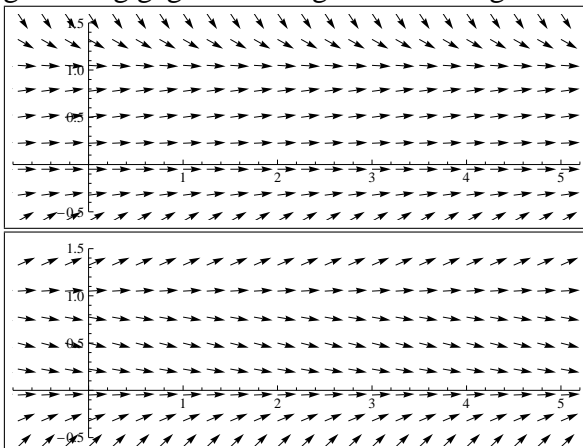
Aufgabe 2. *Wir betrachten die vier Differentialgleichungen

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| i. $y'(x) = y(x)(1 - y(x)),$ | iii. $y'(x) = y(x)^2(1 - y(x)),$ |
| ii. $y'(x) = y(x)(y(x) - 1),$ | iv. $y'(x) = y(x)(1 - y(x))^2.$ |

Die folgenden Bilder zeigen jeweils einige Lösungen der Differentialgleichungen:



Nun folgen noch Bilder der Richtungsfelder, in denen der Pfeil im Punkte (x, y) die durch die Differentialgleichung gegebene Tangentialrichtung einer Lösung anzeigt:



Ordnen Sie die Bilder den Differentialgleichungen zu.

*Für diese Aufgabe gibt es 10 Punkte.

Aufgabe 3. Die Position $h(t)$ eines Apfels zur Zeit t , der bis zum Zeitpunkt $t = 0$ auf 3 Meter Höhe hängt und ab $t = 0$ ohne Reibung vom Baum fällt, erfüllt die DGL

$$mh''(t) = -mg.$$

Mit welcher Geschwindigkeit trifft er den Boden? Es gilt $g = 9.8 \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \right]$.

Aufgabe 4. ‡Die Position $h(t)$ eines Apfels zur Zeit t , der bis Zeitpunkt $t = 0$ in einem Heißluftballon auf 3000 Meter Höhe festgehalten wird und anschließend losgelassen wird, erfüllt die DGL

$$mh''(t) = -c h'(t) |h'(t)| - mg.$$

Der Apfel werde als glatte Kugel mit einem Radius von $r = 0.09$ Metern und einem spezifischen Gewicht (Dichte) von $1100 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ betrachtet. Für eine solche glatte Kugel gilt bei Bewegung in Luft für den Wert von c : $c = 0,001 r$. Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Apfel den Boden? Antworten, die weniger als 5% von wahren Wert abweichen, gelten als richtig.

Erläuterung: Die Differentialgleichung lässt sich physikalisch interpretieren als

$$\text{beschleunigende Kraft} = \text{Reibungskraft} + \text{Gewichtskraft}.$$

Die Reibungskraft wirkt dabei entgegengesetzt zur Geschwindigkeit und wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

‡unbewertete Zusatzaufgabe