Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am 18.12.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x(t) - y(t) + x(t)z(t) \\ 1 - y(t) - z(t) + x(t)y(t) \\ 1 - z(t) - y(t) + y(t)z(t) \end{pmatrix}.$$

1. Ist das um $(1,1,1)$ linearisierte System stabil oder instabil?
2. Ist der Gleichgewichtspunkt $(1,1,1)$ des ursprünglichen Systems stabil oder instabil?
   Hinweis: Es gibt Lösungen mit $x = y = z$.

Aufgabe 2. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(u(t))^3 + v(t) \\ -v(t)\left((u(t))^2 + (v(t))^2\right) \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass das beim Gleichgewichtspunkt linearisierte System instabil ist.
2. Sei $t \mapsto (u(t), v(t))$ eine Lösung. Wir definieren
   $$F(t) = (u(t))^6 + 2(v(t))^2.$$
   Zeigen Sie, dass $F'(t) \leq 0$ gilt.
   Hinweis: $u^5 v = u^4(uv) \leq \frac{1}{2}u^8 + \frac{1}{2}(uv)^2$.
3. Ist der Gleichgewichtspunkt stabil?
4. Ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil?
5. Sei $u(0) = 115$ und $v(0) = 36\pi$. Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty}(u(t), v(t))$.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gleichmäßig Lipschitz-stetig mit Konstante L. Seien $t \mapsto x_a(t)$ und $t \mapsto x_b(t)$ beide Lösungen von $x'(t) = f(x(t))$. Zeigen Sie:

$$\|x_a(t) - x_b(t)\| \leq e^{Lt}\|x_a(0) - x_b(0)\|.$$

(bitte wenden)

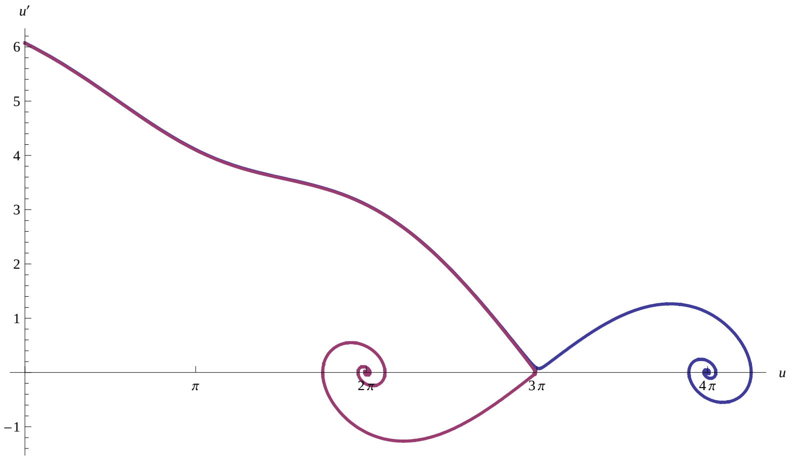
Aufgabe 4. Die Bewegung eines Pendels mit Reibung wird beschrieben durch

$$u''(t) = -\frac{1}{2}u'(t) - \sin(u(t)).$$

1. Zeigen Sie, dass für zwei Lösungen u_a und u_b gilt:

$$|u_a(t) - u_b(t)| \leq e^{\sqrt{2}t}\sqrt{(u_a(0) - u_b(0))^2 + \left(u_a'(0) - u_b'(0)\right)^2}. \tag{1}$$

   Dies bedeutet, dass Lösungen nur langsam auseinander gehen.



2. In der Abbildung sind Trajektorien $\{(u(t), u'(t)); t > 0\}$ zweier Lösungen dieser Gleichung mit $u_a(0) = u_b(0) = 0$, $u_a'(0) = 6.065$ und $u_b'(0) = 6.075$ skizziert. Sind diese total unterschiedlichen Trajektorien ein Widerspruch (1)?

3. Beschreiben Sie in Worten, was da physikalisch passiert.