Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **WS 2008/2009**

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden am 08.01.09 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Seien $\alpha,\beta,\gamma,\delta > 0$ in

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha x(t)-\beta y(t))\,x(t) \\ (1-\gamma x(t)-\delta y(t))\,y(t) \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie eine Bedingung an dafür, dass es in $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ einen Gleichgewichtspunkt gibt.
2. Geben Sie eine zweite Bedingung an dafür, dass dieser Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $V(u,v) = u^4 + v^2$ eine Lyapunov-Funktion ist bei $(0,0)$ für

$$\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(x)^2 - u(x)^3 \\ \left(u(x)^2-1\right) v(x) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-x(t)^2-y(t)^2\right) x(t) - y(t) \\ x(t) + \left(1-x(t)^2-y(t)^2\right) y(t) \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass $(0,0)$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt ist.
2. Leiten Sie eine Differentialgleichung her für $r(t) = \sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$.
3. Sei $\varphi(t)$ definiert durch $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ und $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$. Zeigen Sie, dass $\varphi'(t) = 1$ gilt.
4. Zeigen Sie, dass für jeden Anfangswert ungleich $(0,0)$ die zugehörige Lösung wie folgt konvergiert:
$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t)^2+y(t)^2\right) = 1.$$
5. Fertigen Sie eine Skizze einiger Trajektorien an.

Aufgabe 4. Wir betrachten das folgende Lorenz-System für $c \in (0,1)$ und $a,b \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,(y(t)-x(t)) \\ cx(t)-y(t)-x(t)z(t) \\ x(t)y(t)-bz(t) \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass $V(x,y,z) = x^2+ay^2+az^2$ für dieses Lorenz-System eine Lyapunov-Funktion bei $(0,0,0)$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ auch für $c=1$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

Hinweis: Die nächste Vorlesung findet am 8. Januar 2009 statt.