Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 14

Diese Hausaufgaben werden am 29.01.09 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\begin{cases} u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) \text{ und } u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

nur dann eine Lösung hat, wenn

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Zeigen Sie auch, dass es in diesem Fall unendlich viele Lösungen gibt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion $G(x,y)$ für

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(p(x)u'(x)\right) + q(x)u(x) = f(x) \text{ für } x \in (a,b) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

1. Mit Ausnahme der Stelle $x = y$ erfüllt $x \mapsto G(x,y)$ das Randwertproblem (1) mit $f = 0$.
2. $\lim\limits_{x \downarrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) - \lim\limits_{x \uparrow y} \frac{\partial}{\partial x} G(x,y) = \frac{1}{p(y)}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie eine Greensche Funktion $G(x,y)$ für

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u'(1) = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

für jedes $f \in C[0,1]$ genau eine Lösung?

Aufgabe 5. * Zeigen Sie, dass das folgende Randwertproblem mindestens eine Lösung hat.

$$\begin{cases} u''(x) = \cos(u(x)) \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 6. * Zeigen Sie, dass das folgende Randwertproblem mindestens eine Lösung hat.

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{u(x)^3}{1+u(x)^2} + \sin x \text{ für } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \text{ und } u(1) = 0 \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie $u_a(x) = -\sin x + ax$.

*unbewertete klausurrelevante Zusatzaufgabe