Prof. Guido Sweers **WS 2008/2009**
Matthias Erven

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 3

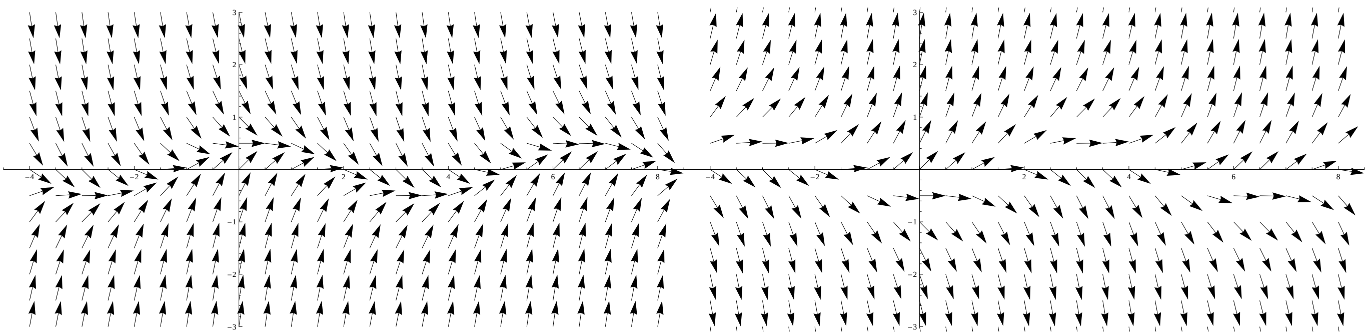
Diese Hausaufgaben werden am 30.10.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

1. $y'(t) - y(t) = 2te^{2t}$, $y(0) = 1$
2. $y'(t) = (1-2t)(y(t))^2$, $y(0) = -\frac{1}{6}$
3. $y'(t) = \frac{t^2+3y^2}{2ty}$, $y(2) = 2$
4. $ty'(t) + 2y(t) = \sin(t)$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Aufgabe 2. Die folgenden Skizzen zeigen Richtungsfelder zu Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = f_i(t, x(t)).$$



1. Beschreiben Sie jeweils qualitativ in Abhängigkeit vom Anfangswert $x(0) = a$, wie die Lösungen aussehen.
2. Die rechten Seiten der Differentialgleichungen sind gegeben durch:

   $$f_1(t,x) = \cos(t) - 2x \qquad\qquad f_2(t,x) = \cos(t) + 2x$$

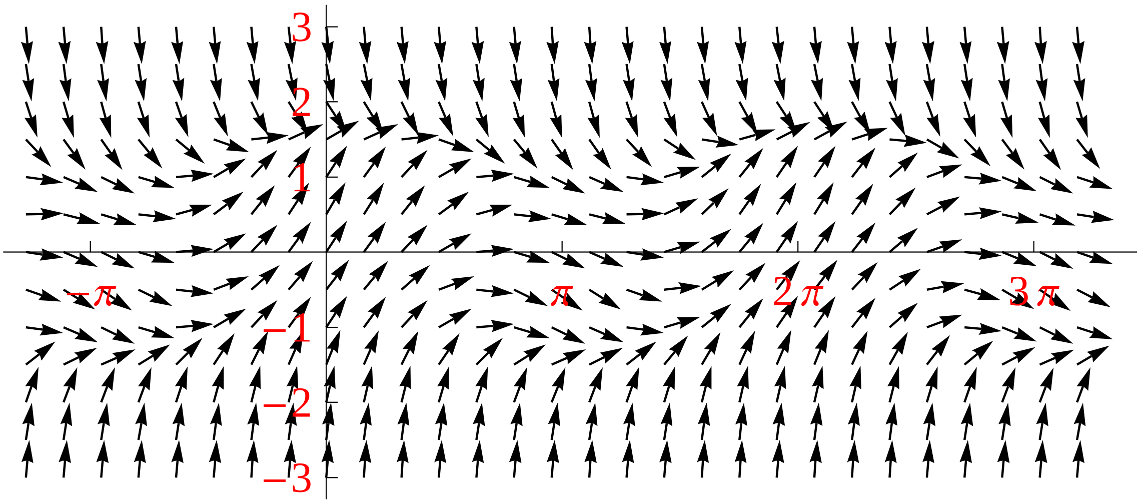
   Ordnen Sie die Funktionsvorschriften den Richtungsfeldern zu.
3. Lösen Sie die Differentialgleichungen. Für welche Anfangswerte sind die Lösungen periodisch?

(bitte wenden)

Aufgabe 3. Die Differentialgleichung

$$y' = \cos(t) + \frac{1}{2}y(t)\left(1 - (y(t))^2\right) + \frac{1}{2}$$

hat eine periodische Lösung. Skizzieren Sie im unten angegebenen Richtungsfeld den Graphen dieser periodischen Lösung.



Aufgabe 4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(x+2)\sin(y(x)) + x\cos(y(x))\,y'(x) = 0. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung nicht exakt ist.
2. Manchmal kann man eine exakte Differentialgleichung erhalten, indem man beide Seiten mit einem so genannten integrierenden Faktor $\mu(y,x)$ multipliziert. Im Allgemeinen ist es nicht einfach, einen solchen zu finden. Es kann aber vorkommen, dass es einen integrierenden Faktor gibt, der nur von einer Variablen abhängt. Stellen Sie für (1) eine Differentialgleichung für einen solchen Faktor auf, der nur von x abhängt.
3. Lösen Sie (1), indem Sie eine Gleichung finden, die $y(x)$ implizit festlegt.

Aufgabe 5. Finden Sie eine Familie von Trajektorien, die orthogonal liegen zu

$$\{(x,y); y = c\cosh(x)\}_{c\in\mathbb{R}}\,.$$