Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 4

Diese Hausaufgaben werden am 06.11.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (0,1) \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \end{cases}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen von:

1. $h'(t) = f(h(t))$ mit $h(1) = 0$;
2. $k'(t) = -f(k(t))$ mit $k(1) = 0$.

Aufgabe 2. Man nennt eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b] \subset I$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L_{[a,b]}$, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq L_{[a,b]} |x - y| \text{ für alle } x, y \in [a,b].$$

Welche Funktionen sind Lipschitz-stetig auf $[-M, M]$? Geben Sie bei diesen Funktionen jeweils ein mögliches $L_{[-M,M]}$ an.

a. $f(x) = |x|$;
b. $f(x) = x^2$;
c. $f(x) = \sqrt[5]{x}$;
d. $f(x) = \frac{1}{x}$.

Und welche sind Lipschitz-stetig auf $\left[\frac{1}{M}, M\right]$? Geben Sie wieder mögliche Lipschitz-Konstanten an.

Aufgabe 3. Berechnen Sie, soweit es jeweils möglich ist, alle Lösungen von:

1. $x'(t) = \frac{1}{t} x(t)$ mit $x(0) = 0$.
2. $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ mit $y(0) = 0$.
3. $z'(t) = \sqrt{z(t) + t}$ mit $z(0) = 0$.

Aufgabe 4. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

mit

$$f(t,x) = e^{t\,x}.$$

Zeigen Sie für jede Lösung $x : [0, a) \to \mathbb{R}$, dass $a \leq 2$ gilt.
Hinweis I: Zeigen Sie $x(t) \geq 0$ für $t \geq 0$.
Hinweis II: Zeigen Sie $x(t) \geq t$ für $t \geq 0$.
Hinweis III: Verwenden Sie $f(t,x) \geq e^x$ für $t \geq 1$.