Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 5

Diese Hausaufgaben werden am 13.11.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt Lipschitz-stetig auf I mit Lipschitz-Konstante L_I, wenn für alle $x, y \in I$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L_I |x - y|.$$

Zeigen Sie:

1. Ist f Lipschitz-stetig, so ist f stetig.
2. Ist f differenzierbar mit beschränkter Ableitung, so ist f Lipschitz-stetig.

Geben Sie außerdem ein Beispiel an für eine Funktion, die...

3. ...stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.
4. ...Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar mit beschränkter Ableitung ist.

Aufgabe 2. *Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie für beide Matrizen (mit Begründung) die Eigenwerte samt Vielfachheiten und Eigenvektoren an.

Im Folgenden betrachten wir die Systeme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Fertigen Sie jeweils Skizzen der Lösungen wie in Kapitel 4.3.1 (Klassifizierung in 2 Dimensionen) an. Ist das jeweilige System stabil, instabil,...? Welcher Fall (Knoten, Strudel,...) liegt vor?
3. Im folgenden sind verschiedene Anfangswerte gegeben. Wie verhält sich jeweils die Lösung von (1) für $t \to \infty$?

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie jeweils die Lösung von (1) mit Anfangswert

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(bitte wenden)

*Für diese Aufgabe gibt es 8 Punkte.

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{cases} x'''(t) + 2x''(t) - x'(t) - 2x(t) = \sin(2t) \\ x(0) = \frac{1}{20},\ x'(0) = -\frac{71}{10},\ x''(0) = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie alle Lösungen von

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{t} & \frac{4}{t} \\ \frac{2}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Ein Hinweis der Fachschaft:
Die Fachschaft möchte Euch zu der Adventsparty am 28.11. ab 20 Uhr in den S2 des Mathematischen Instituts einladen. Wie immer mit lecker Kölsch, Glühwein und Musik. Wir freuen uns auf Euch! Eure Fachschaft