Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 6

Diese Hausaufgaben werden am 20.11.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

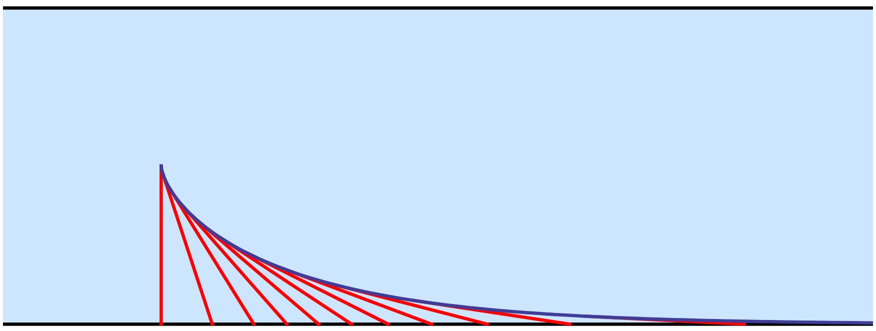
$$(1+x^2)y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$$

1. Finden Sie zunächst eine Lösung des Anfangswertproblems, indem Sie annehmen, dass sich die Lösung y als Potenzreihe schreiben lässt.
2. Zeigen Sie dann, dass das Problem keine andere Lösung haben kann, indem Sie es in ein System erster Ordnung umwandeln und ein geeignetes Lemma anwenden.

Aufgabe 2. Schneebälle, Mottenkugeln und Bonbons haben wenigstens eines gemeinsam: ihre Volumina V vermindern sich beim Abschmelzen, Verdunsten bzw. Lutschen mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist. Die Proportionalitätskonstante sei $-\lambda$ mit $\lambda > 0$. Sei r_0 der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t.

1. Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Veränderung des Radius' beschreibt, und lösen Sie diese.
2. Die Mottenkugel habe nach 60 Tagen nur ein Achtel ihres ursprünglichen Volumens. Nach wie vielen Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft?

Aufgabe 3. Ein Boot treibt mitten in einem Kanal. Wenn man es vom Ufer her abschleppt, folgt es einer Kurve wie in untenstehender Skizze. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die diese Kurve beschreibt, und lösen Sie diese. Nehmen Sie dazu an, dass sich das Boot immer in Richtung des Schleppseiles der Länge 1 bewegt und dieses stets straff gespannt bleibt.



Aufgabe 4. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x'(t) = 2tx(t),\ x(0) = 1.$$

Verwenden Sie das Verfahren der Picard-Iteration, um eine Lösung durch eine Funktionenfolge zu approximieren. Gegen welche Funktion konvergiert diese Funktionenfolge? Zeigen Sie, dass diese Funktion tatsächlich das Anfangswertproblem löst.

Aufgabe 5. Finden Sie alle Lösungen von

$$x''''(t) + 2x''(t) + x(t) = t\sin(t).$$