Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 7

Diese Hausaufgaben werden am 27.11.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. **(4 Punkte)** Insbesondere für stetige Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wird die Norm $\|f\|_2$ definiert durch

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $f \in C([0,1])$ gilt
$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$
2. Zeigen Sie, dass jede Folge in $C([0,1])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm konvergiert, dies auch bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm tut.
3. Finden Sie eine Folge von Funktionen aus $C([0,1])$, die bezüglich der $\|\cdot\|_2$-Norm konvergiert, aber nicht bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.
4. Ist $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm für die stetigen Funktionen auf $(0,1)$?

Aufgabe 2. **(2 Punkte)** Nach Korollar 6.7 ist $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Ist auch $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum?

Aufgabe 3. **(10 Punkte)** Wir betrachten die folgenden Funktionen f_i, definiert auf D_i:

$$\begin{aligned}
&f_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x + e^{-x}\\
&f_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + 1\\
&f_3 : \{z \in \mathbb{C}; \|z\| \leq 1\} \to \mathbb{C},\ f_3(z) = \tfrac{1}{2}\left(z^2 + i\right)\\
&f_4 : C([0,1]) \to C([0,1]),\ (f_4(x))(t) = \tfrac{1}{2}x(t^2) + \tfrac{1}{2}\\
&f_5 : C([0,1]) \to C([0,1]),\ (f_5(x))(t) = x(t^2)
\end{aligned}$$

Dabei sei $\mathbb{R}$ mit dem Betrag als Norm, $\mathbb{C}$ mit dem komplexen Betrag und $C([0,1])$ mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm versehen. Beantworten Sie mit Beweis jeweils folgende Fragen:

1. Gilt $\|f_i(x) - f_i(y)\| < \|x-y\|$ für alle $x,y \in D_i$ mit $x \neq y$?
2. Gibt es ein $L \in (0,1)$, so dass $\|f_i(x) - f_i(y)\| \leq L\|x-y\|$ gilt für alle $x,y \in D_i$?
3. Ist der Banachsche Fixpunktsatz anwendbar für f_i?
4. Wie viele Fixpunkte hat f_i?

(bitte wenden)

Aufgabe 4. **(4 Punkte)** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(y(x)), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

1. Geben Sie eine Lipschitz-Konstante an, so dass die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.

2. Wie lautet die Picard-Iteration zu diesem Anfangswertproblem?

3. Geben Sie ein Intervall $[0, a]$ an, für das man nach dem Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer Lösung bekommt.

4. Zeigen Sie, dass die Lösung sogar auf $[0, \infty)$ existiert und dass $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}\pi$ gilt.