Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

WS 2008/2009

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Übungsblatt 9

Diese Hausaufgaben werden am 11.12.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Gegeben sei das folgende System:

$$\begin{cases} u'(t) &= 1 - (v(t))^2 \\ v'(t) &= 1 - (u(t) - v(t))^2 \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems.
2. Entscheiden Sie bei jedem Gleichgewichtspunkt, ob er stabil oder instabil ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei das System

$$\begin{cases} u'(t) &= e^{v(t)-u(t)} - 1 \\ v'(t) &= \sin(\pi + u(t) + v(t)) \end{cases} \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.
2. Berechnen Sie das um (π, π) linearisierte System.
3. Ist (π, π) ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt von (1)?
4. Skizzieren Sie eine Trajektorie in einer Umgebung von (π, π).

Aufgabe 3. Gegeben sei das System

$$\begin{cases} u'(t) &= (v(t) - u(t))\left((u(t))^2 + (v(t))^2\right) \\ v'(t) &= -(v(t) + u(t))\left((u(t))^2 + (v(t))^2\right) \end{cases} \tag{2}$$

1. Berechnen Sie das um den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ linearisierte System und klassifizieren Sie dieses. Welche Aussage kann man über die Stabilität des Systems (2) treffen?
2. Zeigen Sie: Ist $(u, v) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung von (2), so löst $w : I \to \mathbb{R}$, $w(t) = (u(t))^2 + (v(t))^2$ die Differentialgleichung $w'(t) = -2\,(w(t))^2$.
3. Gilt für jede Lösung (u, v) von (2) mit Anfangswert $(u(0), v(0))$, dass $\lim_{t\to\infty} (u(t), v(t)) = (0,0)$?

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Das sogenannte *mathematische Pendel* ist ein idealisiertes Fadenpendel, bei dem Reibungskräfte vernachlässigt werden. Für den Winkel $\varphi(t)$, der die Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t aus der Ruhelage beschreibt, gilt (bei geeigneter Wahl der auftretenden Größen wie Ortsfaktor und Fadenlänge) die Differentialgleichung

$$\varphi''(t) = -\sin(\varphi(t)).$$

1. Schreiben Sie die Differentialgleichung um in ein System erster Ordnung, indem Sie $x(t) := \varphi(t)$ und $y(t) := \varphi'(t)$ setzen. Zeigen Sie, dass dieses System für jeden Startwert $(x(0), y(0))$ eine eindeutige Lösung besitzt.

2. Berechnen Sie die stationären Punkte des Systems. Wie lassen sich diese interpretieren?

3. Es sei $H(x,y) = -\cos(x) + \frac{1}{2}y^2$. Zeigen Sie: Ist $(x,y) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine Lösung des Systems, dann ist $t \mapsto H(x(t), y(t))$ konstant.

4. Skizzieren Sie die Mengen $M_c := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; H(x,y) = c\right\}$ für $c = 0, 1, 2$.

5. Zum Beginn der Bewegung gelte $x(0) = 0$. Zeigen Sie: Ist der „Anfangsschwung“ $y(0)$ genügend klein, dann kommt es beim Pendel nicht zum Überschlag.