Prof. Guido Sweers
Matthias Erven

SS 2008

Funktionentheorie
Übungsblatt 10

Diese Hausaufgaben werden am 19.06.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Abbildung h, definiert durch

$$z \mapsto ie^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(iz-1)+\operatorname{Log}(iz+1))}.$$

1. Zeigen Sie: Auf $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ ist h wohldefiniert und holomorph.
2. Zeigen Sie, dass h eine Bijektion von $\mathbb{C} \setminus i[-1,1]$ nach $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ definiert. Wie lautet die Umkehrabbildung?
3. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist.

Aufgabe 2. Die Abbildung h aus Aufgabe 1 lässt sich als komplexes Potential einer Strömung um eine Wand senkrecht zur Strömungsrichtung auffassen. Diese entspricht dem Schlitz $i[-1,1]$, auf dem h nicht holomorph ist.

1. Wie lautet das zugehörige reelle Potential F, das die Strömung beschreibt?
2. Berechnen Sie das Vektorfeld $\vec{v}$, das die Geschwindigkeit der Strömung angibt.
3. Zeigen Sie, dass die Wand tatsächlich umflossen wird, dass also die Neumann-Randbedingung auf beiden Seiten des Schlitzes erfüllt wird.
4. Die Funktion $h_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto -z$ ist das Potential einer konstanten Strömung ohne Hindernis. Das zugehörige Vektorfeld sei $\vec{v}_0$. Zeigen Sie, dass die durch h beschriebene Strömung in einiger Entfernung von der Wand einer solchen ungestörten Strömung entspricht, indem Sie nachweisen, dass $\lim_{|z|\to\infty} |\vec{v}(z) - \vec{v}_0(z)| = 0$ gilt.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie die Niveau- und Strömungslinien der in Aufgabe 2 untersuchten Strömung. Verwenden Sie dazu gerne ein Computeralgebrasystem wie Maple oder Mathematica.

(bitte wenden)

Aufgabe 4. Die Funktion $f:\mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}\to\mathbb{C}\setminus[-2,2]$ mit $f(z)=z+\frac{1}{z}$ ist bijektiv. Die inverse Funktion hat als Vorschrift

$$f^{inv}(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z+i\,e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)} & \text{für } \operatorname{Im}(z)>0,\\ \frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1} & \text{für } z\in(2,\infty)\,,\\ \frac{1}{2}z-\sqrt{\frac{1}{4}z^2-1} & \text{für } z\in(-\infty,-2)\,,\\ \frac{1}{2}z-i\,e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)} & \text{für } \operatorname{Im}(z)<0.\end{cases}$$

Diese Inverse kann man auch durch folgende Vorschrift angeben:

$$f^{inv}(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z+e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{4}z^2-1\right)} & \text{für } \operatorname{Re}(z)>0 \text{ und } z\notin[0,2]\,,\\ \frac{1}{2}z+i\sqrt{1-\frac{1}{4}z^2} & \text{für } z\in i\,(0,\infty)\,,\\ \frac{1}{2}z-i\sqrt{1-\frac{1}{4}z^2} & \text{für } z\in i\,(-\infty,0)\,,\\ \frac{1}{2}z-e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1}{4}z^2-1\right)} & \text{für } \operatorname{Re}(z)<0 \text{ und } z\notin[-2,0]\,.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen übereinstimmen.

Aufgabe 5. Die Funktion $g:\mathbb{C}\setminus((-\infty,2]\cup[2,\infty))$ mit $g(z)=\frac{1}{2}z+i\,e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{4}z^2\right)}$ ist holomorph. Beschreiben Sie die Strömung zum Potential

$$F\,(x,y)=\operatorname{Re}g\,(x+iy)\,.$$