Prof. Guido Sweers
Matthias Erven **SS 2008**

Funktionentheorie
Übungsblatt 11

Diese Hausaufgaben werden am 26.06.08 um 13:00 Uhr eingesammelt. Bitte schreiben Sie auf Ihre Lösung Ihren Namen und Ihre Gruppennummer und werfen Sie sie in den Briefkasten im Keller des Mathematischen Instituts.

Aufgabe 1.

1. Sei $f: B_1(0) \to B_1(0)$ biholomorph. Zeigen Sie, dass sich f stetig auf dem Rand $\partial B_1(0)$ fortsetzen lässt und dass $f(\partial B_1(0)) \subset \partial B_1(0)$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass eine biholomorphe Abbildung $f: B_1(0) \to B_1(0)$ eindeutig festgelegt wird
   - durch Angabe der Bilder dreier Randpunkte oder
   - durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $f'(\tilde{z})$ für ein $\tilde{z} \in B_1(0)$ oder
   - durch Angabe von $f(\tilde{z})$ und $f(\hat{z})$ für $\tilde{z} \in B_1(0)$ und $\hat{z} \in \partial B_1(0)$.

Aufgabe 2. In der Literatur findet man auch folgende Formulierung des Schwarzschen Lemmas:

Es sei $f: B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für $z \in B_1(0)$ und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt ausserdem $|f(z_0)| = |z_0|$ in einem Punkt $z_0 \neq 0$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = e^{i\lambda} z$ mit passendem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass diese Formulierung äquivalent zu der aus der Vorlesung ist (Lemma 10.6 in den Notizen zur Vorlesung).

Aufgabe 3. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f: U \to \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung. Weiterhin sei die für $x + iy \in U$ definierte Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(x+iy) \\ \operatorname{Im} f(x+iy) \end{pmatrix}$$

reell differenzierbar. Zeigen Sie, dass f holomorph ist.

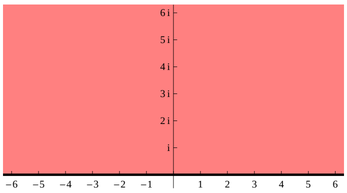
Aufgabe 4.

1. Zeigen Sie, dass durch
$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$
   eine biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{R} + i\mathbb{R}^+ \to B_1(0)$ definiert wird.
2. Bestimmen Sie alle biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ nach $B_1(0)$.

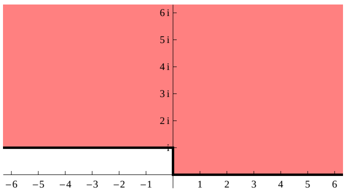
(bitte wenden)

Aufgabe 5.

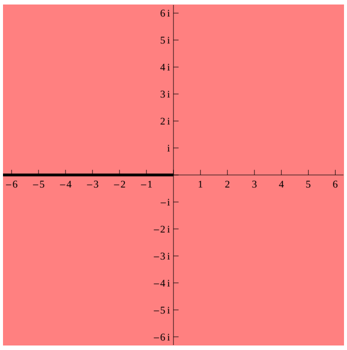
1. Geben Sie eine Abbildung h an, die die obere Halbebene $\mathbb{R}+i\mathbb{R}^+$ biholomorph auf $(\mathbb{R}+i\mathbb{R}^+)\setminus((-\infty,0]+i(0,1])$ abbildet.



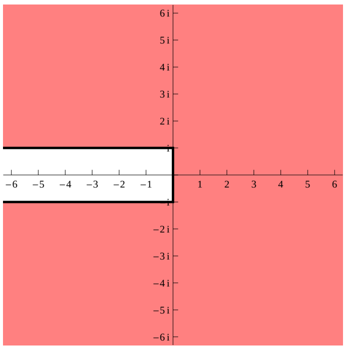
$\longrightarrow$



2. Verwenden Sie Ihr Ergebnis, um eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ nach $\mathbb{C}\setminus((-\infty,0]+i[-1,1])$ zu finden.



$\longrightarrow$



Ein Hinweis der Fachschaft:

Auch in diesem Jahr veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest! Dieses beginnt mit einem Vortrag von Prof. Bär zu dem Thema „Kann man die Form einer Trommel hören?“ im Hörsaal des MI

am Freitag, 27.06.2008
um 16.30 Uhr.

Danach wird im Hof des Mathematischen Instituts gegrillt und Live-Musik gibts auch! Ihr seid herzlich eingeladen, und wir freuen uns auf Euch!